Serie 13

1. Sei
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis: Führen Sie einen Induktionsbeweis und zeigen Sie, dass $f^{(k)}(x) = p_k(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$ und ein Polynom p_k ist.

2. Seien $f, g \in C^n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $fg \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R})$ und
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$
Hinweis: Führen Sie einen Induktionbeweis.

3. In dieser Aufgabe wollen wir die sogenannten Hermiteschen Polynome definieren und untersuchen.
   (a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktion
   $$\psi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
   $$\psi_n(x) := (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$
   von der Form $\psi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ ist, wobei H_n ein Polynom vom Grad n ist. Man nennt H_n das n-te Hermitesche Polynom.
   Hinweis: Führen Sie einen Induktionsbeweis.

   (b) Zeigen Sie, dass die Hermite Polynome die folgende Rekursionsgleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ erfüllen:
   $$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

4. Approximieren Sie $\log(\frac{3}{2})$ durch eine rationale Zahl mit einer Fehlertoleranz von maximal $\frac{1}{24}$.
Hinweis: Entwickeln Sie die Funktion $\log(1 + x)$, $x > 0$ um die Stelle $x_0 = 0$ mittels der Taylor-Formel, um den Fehler abzuschätzen.

5. Berechnen Sie
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin(x)},$$
indem Sie den Limes in die Form
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)}$$
für geeignete *differenzierbare* Funktionen f und g bringen.

6. In dieser Aufgabe wollen wir die Höldersche Ungleichung beweisen. Seien $x_i \geqslant 0, y_i \geqslant 0, i \in \{1, \dots, n\}$ reelle Zahlen und $p, q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $p > 1$. Zeigen Sie, dass dann

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

gilt.
Hinweis: Verwenden Sie die Youngsche Ungleichung $a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b$ für $a, b, q > 0$ und $p > 1$.

7. **Multiple Choice Aufgaben:**

1. Welche Funktion hat eine Taylorentwicklung um den Nullpunkt, welche bis zu zweiter Ordnung gleich: $1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2$ ist?

(a) $f(x) := x^2/2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

(b) $g(x) := x^3/3 + x^2/2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

(c) $h(x) := x^3 + x^2/2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

(d) $k(x) := x + 1, x \in \mathbb{R}$.

(e) exp.

2. Welche Funktion hat eine Taylorentwicklung um den Nullpunkt, welche bis zu Nullter Ordnung gleich: 1 ist?

(a) cos.

(b) sin.

(c) exp.

(d) $\log(1 + x)$.

3. Welche Funktion gleicht ihrer Taylorentwicklung $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ um den Nullpunkt?

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x}, |x| < 1$.

(b) $g(x) = \frac{1}{1-x}, |x| < \frac{1}{2}$.

(c) $h(x) = \frac{1}{1-x}, x \neq 1$.

4. Welche der folgenden Funktionen ist konvex?

(a) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) $-\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

(c) Die Heaviside-Funktion H mit $H(0) = 1$.

Abgabe: Diese Serie wird nicht abgegeben und nicht korrigiert. Eine Musterlösung erscheint dennoch. Die Multiple Choice Aufgaben werden wie gewohnt online bearbeitet und automatisch ausgewertet.