Musterlösung zur Serie 1

1. (a) Wir verwenden die Rechenregeln $|a/b| = |a|/|b|$ sowie $\arg(a/b) = \arg a - \arg b$ ausgiebig und erhalten so

   - $\left|\frac{2\sqrt{2}i}{i-1}\right| = 2\sqrt{2}/|i-1| = 2$, $\quad \arg\left(\frac{2\sqrt{2}i}{i-1}\right) = \pi/2 - \arg(i-1) = -\pi/4$, also
   $$\frac{2\sqrt{2}i}{i-1} = 2e^{-i\pi/4} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$
   - Wegen $|z/\overline{z}| = 1$ und weil arctan ungerade ist, erhalten wir für den Bruch
   $$\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = e^{2i\arctan(\sqrt{3})} = e^{2\pi i/3}.$$
   Potenzieren ist nun kein Problem mehr:
   $$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{2009} = e^{2009\cdot 2\pi i/3} = e^{4\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$
   - Wir rechnen erst die einzelnen Summanden in Polarkoordinaten um: Es gilt $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/2}$. Wir potenzieren diese Terme, addieren sie und verwenden dann die Exponentialdarstellung $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ des Cosinus:
   $$(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} = 2^{n+1}\cos(n\pi/2).$$
   Dies ist auch bereits die Darstellung in Real- und Imaginärteilen. Für die Polarkoordinaten benötigen wir eine kleine Fallunterscheidung:
   $$(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ 2^{n+1}\cdot e^{in\pi/2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (b) Sowohl der Zähler wie auch der Nenner des Bruchs $\frac{6i-10}{4+i}$ haben keine einfach ablesbare Polarkoordinatendarstellung. Wir erweitern den Bruch deshalb mit dem komplex Konjugierten des Nenners:
   $$\frac{6i-10}{4+i} = \frac{6i-10}{4+i}\cdot\frac{4-i}{4-i} = \frac{34i-34}{17} = 2i-2 = \sqrt{8}e^{3\pi i/4}.$$
   Nun können wir leicht die dritte Wurzel ziehen: Für $n = 0, 1, 2$ erhalten wir die 3 Lösungen
   $$z_n = \sqrt{2}e^{i\pi/4 + 2in\pi/3}.$$

2.
$$\begin{array}{l} (z^2+2iz-2+i) : (z+i-1) = z+i+i, \quad \text{Rest } i \\ \underline{z^2+(i-1)z} \\ \quad (i+1)z-2+i \\ \quad \underline{(i+1)z-2} \\ \qquad\qquad i \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
(5z^3+(6-i)z^2+(1-2i)z+3-2i):(z+2iz+i)=(1-2i)z^2-2iz-1, \quad \text{Rest } 3-i \\
\underline{5z^3+(i+2)z^2} \\
\qquad (4-2i)z^2+(1-2i)z+3-2i \\
\qquad \underline{(4-2i)z^2+2z} \\
\qquad\qquad (-2i-1)z+3-2i \\
\qquad\qquad \underline{(-2i-1)z-i} \\
\qquad\qquad\qquad 3-i
\end{array}
$$

3. (a) Die Bedingung $|z-b|=\lambda|z-a|$ lässt sich mit $z=z_1+iz_2, a=a_1+ia_2, b=b_1+ib_2$ umschreiben zu

$$(1-\lambda^2)z_1^2-2(b_1-\lambda^2a_1)z_1+(b_1^2-\lambda^2a_1^2)+(1-\lambda^2)z_2^2-2(b_2-\lambda^2a_2)z_2+(b_2^2-\lambda^2a_2^2)=0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in z_1 und z_2. Mit Hilfe von Matrizen können wir diese Gleichung wiefolgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} -2 \begin{pmatrix} b_1-\lambda^2a_1 \\ b_2-\lambda^2a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} +b_1^2+b_2^2-\lambda^2(a_1^2+a_2^2)=0.$$

Gleichungen dieser Art löst die lineare Algebra mit der Hauptachsentransformation, die in diesem Fall genau dem klassischen quadratischen Ergänzen entspricht. Mit $z_i' := z_i - \frac{b_i-\lambda^2a_i}{1-\lambda^2}$ für $i=1,2$ erhalten wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} - \left(\frac{b_1-\lambda^2a_1}{1-\lambda^2}\right)^2 - \left(\frac{b_2-\lambda^2a_2}{1-\lambda^2}\right)^2 +b_1^2+b_2^2-\lambda^2(a_1^2+a_2^2)=0.$$

Nach etwas Umformen ergibt sich daraus

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}\cdot((a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2).$$

Diese Gleichung ist von der Form $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=e$ mit $c=d$ und $e>0$, stellt also eine Kreisgleichung dar. Der Mittelpunkt befindet sich bei $(\frac{b_1-\lambda^2a_1}{1-\lambda^2}, \frac{b_2-\lambda^2a_2}{1-\lambda^2})$, der Radius beträgt $\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$.

(b) Mit $\lambda=1$ erhalten wir die Gleichung $|z-a|=|z-b|$, also den geometrischen Ort aller Punkte, die von a den gleichen Abstand haben wie von b. Dies ist genau die Gerade, die senkrecht auf der Mitte der Strecke von a nach b steht.

4. (a) Für die Wohldefiniertheit sei $z\in\mathbb{D}$ und wir müssen $\operatorname{Im} f(z)>0$ zeigen.

$$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im}\left(i\frac{1+z}{1-z}\right) = \operatorname{Im}\left(i\frac{1+z}{1-z}\cdot\frac{1-\overline{z}}{1+\overline{z}}\right) = \operatorname{Im}\left(i\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right) > 0.$$

Für die Injektivität seien $z,w\in\mathbb{D}$, so dass $f(w)=f(z)$. Wir folgern

$$i\frac{1+z}{1-z} = i\frac{1-w}{1+w} \iff (1+z)(1-w)=(1-z)(1+w) \iff z=w.$$

Somit ist f injektiv.

Für die Surjektivität beweisen wir in Teil (b), dass die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls injektiv it.

(b) Wir lösen $w = i\frac{1+z}{1-z}$ nach z auf und erhalten $z = \frac{w-i}{w+i}$. Wir behaupten, dass $g : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $g(w) = \frac{w-i}{w+i}$, die Umkehrfunktion von f ist: Aus der Definition folgt $g(f(z)) = z$. Ausserdem ist g wohldefiniert, da für jedes $w \in \mathbb{H}$ die Ungleichung $|w - i| < |w + i|$ gilt, also $|g(w)| < 1$.

Für Teil (a) müssen wir noch zeigen, dass g injektiv ist. Der Beweis dazu ist ähnlich wie bei f: Falls $g(w) = g(z)$, so gilt

$$\frac{w-i}{w+i} = \frac{z-i}{z+i} \iff (w-i)(z+i) = (w+i)(z-i) \iff w = z.$$

(c) Offenbar können wir $\frac{x-i}{x+i}$ auch für reelle Zahlen x berechnen, da $x \neq i$. Die Funktion $f^{-1} = g$ ist also über diese Formel auf die reellen Zahlen fortsetzbar. Im Folgenden sei mit f^{-1} also die auf $\mathbb{R}$ fortgesetzte Funktion gemeint.

Weiter gilt für reelle Zahlen x, dass $|x + i| = |x - i|$, also $|f^{-1}(x)| = 1$, somit $f^{-1}(\mathbb{R}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Wir können ausserdem noch sagen, dass $f^{-1}(x) \neq 1$, da $x + i \neq x - i$. Wir behaupten nun, damit das ganze Bild beschrieben zu haben und beweisen dies: Sei $z \neq 1$ mit $|z| = 1$. Dann ist $x = i\frac{1+z}{1-z}$ reell, was wir anhand der Rechnung von Teil (a) beweisen können:

$$\mathrm{Im}\left(i\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathrm{Im}\left(i\frac{1+z}{1-z}\cdot\frac{1-\overline{z}}{1+\overline{z}}\right) = \mathrm{Im}\left(i\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right) = 0.$$

Damit ist also $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, z \neq 1\}$.

(d) Folgender `Sage`-Code überprüft unsere Aussage:

```
def g(w):
    return (w-I)/(w+I)

errors = 0
for n in range(100):
    x = (random() - 1/2)*20000 # random number in [-10^4, 10^4)
    z = g(x)
    absval = z.abs()
    if abs(absval - 1) > 0.0001:
        errors += 1
        print "Error: ", x, " mapped to ", z," which has absolute value ", absval

if errors == 0:
    print "Successfully checked 100 random numbers!"
```

5. Die Funktion $z \mapsto e^{\frac{\pi z}{2}} =: w$ ist auf Ω surjektiv, da der Imaginärteil von z hinreichend beschränkt ist. Das Bild dieser Funktion ist der erste offene

Quadrant: In Polarkoordinaten erhalten wir schnell $e^{\frac{\pi z}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{Re}(z)} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}\mathrm{Im}(z)}$, wobei wir nun das Argument $\frac{\pi}{2}\mathrm{Im} z \in (0, \frac{\pi}{2})$ beschränken können.

Die Funktion $h(w) = \frac{i-w}{i+w}$ ist genau $h = -f^{-1}$ mit f aus Aufgabe 4. Da der erste Quadrant in der oberen Halbebene liegt, ist $g(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Die Bedingung, dass w im ersten Quadranten liegt, sagt uns, dass $\arg(w+i) > \arg(w-i)$, wie man sich an einer Skizze leicht veranschaulicht. Damit ist $\frac{w-i}{w+i}$ also in der unteren Halbebene, respektive $h(w) = \frac{i-w}{i+w}$ in der oberen Halbebene.

Es fehlt noch zu zeigen, dass h surjektiv auf $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ abbildet. Sei dafür $z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$. Dann ist $f(z) = i\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{H}$. Wir rechnen

$$\mathrm{Re}\left(i\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}-z}{|1-z|^2}\right) < 0.$$

Damit ist $h = -f^{-1}$ surjektiv, also folgt $g(\Omega) = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$.