Musterlösung zur Serie 2

1. (a) Wir haben

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y + i(\gamma x + \delta y)$$

und suchen komplexe Zahlen $a =: s + it$ und $b =: u + iv$ so, dass

$$az + b\bar{z} = sx - ty + ux + vy + i(tx + sy + vx - uy) = \alpha x + \beta y + i(\gamma x + \delta y)$$

gilt. Obige Rechnung zeigt uns, dass $\alpha = s+u$, $\beta = v-t$, $\gamma = t+v$ und $\delta = s - u$ diesen Bedingungen genügen. Wir stellen dieses Gleichungssystem auf s, t, u, v um und erhalten

$$s = \frac{\alpha + \delta}{2}, t = \frac{\alpha - \delta}{2}, u = \frac{\gamma - \beta}{2}, v = \frac{\gamma + \beta}{2}.$$

Somit genügen $a = \frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\alpha-\delta}{2}$ und $b = \frac{\gamma-\beta}{2} + i\frac{\gamma+\beta}{2}$ der Gleichung $f(z) = az + b\bar{z}$.

(b) Aus den Voraussetzungen und Teil (a) ergibt sich bereits $f(z + w) = a(w + z) + b(\overline{w + z}) = aw + b\bar{w} + az + b\bar{z} = f(w) + f(z)$. Wir suchen also Bedingungen an f, so dass für jedes $c \in \mathbb{C}$ die Gleichung $f(cz) = cf(z)$ gilt. Wir rechnen

$$f(cz) = acz + b\overline{cz} \overset{!}{=} acz + bc\bar{z} = cf(z).$$

Damit diese Gleichung für alle komplexen c und z gilt, muss $b = 0$ gelten. Somit erhalten wir die Abbildung $f(z) = az$, die offensichtlich linear ist. Eine so über eine Matrix definierte Funktion ist also genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $b = 0$, was äquivalent zu $\alpha = \delta, \beta = -\gamma$ ist.

2. (a) Wie im reellen Fall berechnen wir den Differentialquotienten:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{1\le j\le n} \binom{n}{j} z^{n-j} h^j}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{1\le j\le n} \binom{n}{j} z^{n-j} h^{j-1} \\
&= \sum_{1\le j\le n} \binom{n}{j} z^{n-j} \lim_{h\to 0} h^{j-1} \\
&= nz^{n-1}.
\end{aligned}$$

(b) Ebenfalls analog zum reellen Fall:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^z(e^h - 1)}{h} \\
&= e^z \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}.
\end{aligned}$$

Der bekannte Grenzwert $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ gilt auch im Komplexen, was wir beispielsweise der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion entnehmen können. Somit gilt $f'(z)=e^z$.

(c) Es gilt $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, womit derSinus als Linearkombination von zwei holomorphen Funktionen ebenfalls holomorph ist. Die Ableitung berechnen wir ebenfalls über diese Darstellung:

$$\sin'(z)=\frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z.$$

3. (a) Wir schreiben $\tau=u+iv$ und berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq -1=\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen sind also nicht erfüllt, also ist τ nicht holomorph.

(b) Die Funktion h ist als Verkettung reell differenzierbarer Funktionen auch reeell differenzierbar. Wir haben somit noch zu prüfen, ob $\frac{\partial h}{\partial x}+i\frac{\partial h}{\partial y}\equiv 0$ gilt.
Wir schreiben $f:=u+iv$ und erhalten

$$h(z)=\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y).$$

Somit gilt für $h:=u_h+iv_h$. Da f die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt, erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_h}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial u}{\partial x}(x,-y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,-y)=\frac{\partial v_h}{\partial y}(x,y),\\ \frac{\partial u_h}{\partial y}(x,y)&=-\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y)=\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y)=-\frac{\partial v_h}{\partial y}(x,y).\end{aligned}$$

Die Funktion h erfüllt damit die gewünschte Gleichung ebenfalls, ist also holomorph.

4. Wir schreiben $f=:u+iv$ und rechnen

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right).$$

Nun ist f genau dann holomorph, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0,$$

was genau dann der Fall ist, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\equiv 0$.

5. (a) f ist überall reell differenzierbar. Wir berechnen die Wirtingerableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(5x^4y^4-i4x^3y^5+i4x^5y^3+5x^4y^4)=\frac{1}{2}(10x^4y^4+ix^3y^3(x^2-y^2)).$$

Dieser Ausdruck verschwindet nur, wenn $xy=0$ gilt. f ist also genau dann komplex differenzierbar, wenn $x=0$ oder $y=0$, und die komplexe Ableitung ist an diesen Punkten 0, da alle partiellen Ableitungen verschwinden.

(b) Es gilt

$$f(x,y) = \frac{i(x-iy)}{|z|^2} = \frac{i\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{i}{z}.$$

Diese Funktion ist holomorph auf $\mathbb{C}^*$ mit Ableitung $\frac{-i}{z^2}$.

(c) f ist wiederum reell differenzierbar. Für die partiellen Ableitungen von $f =: u + iv$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^x.$$

Damit beide Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt sind, benötigen wir $e^x = e^y$, also $x = y$. Die Ableitung ist an diesen Stellen $f'(z) = -ie^y = -ie^x$.

(d) Die Funktion $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ ist als Verkettung reell differenzierbarer Funktionen ebenfalls reell differenzierbar. Da f reell ist, müssen wir nur noch überprüfen, wo die partiellen Ableitungen nach x und y verschwinden.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot \cos(x^2+y^2), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y \cdot \cos(x^2+y^2).$$

Dies ist also der Fall, wenn $\cos(|z|^2)$ verschwindet, also $|z| \in \{\sqrt{\pi/2}, \sqrt{3\pi/2}, \sqrt{5\pi/2}, \ldots\}$ oder andernfalls wenn $x = y = 0 \Rightarrow z = 0$. In beiden Fällen ist die Ableitung aus obiger Diskussion 0.

(e) Wieder hat f einen verschwindenen Imaginärteil. Da die Ableitung nach x allerdings stets 1 ist, ist f nirgends komplex differenzierbar.

(f) Die Funktion $g(z) = z^{44}|z|^2$ ist nur in 0 differenzierbar. Da $f(z)^2 = g(z)$ würde die Differenzierbarkeit von f der Nicht-Differenzierbarkeit von g widersprechen, womit f nur in 0 differenzierbar sein kann.

(g) Die Funktion f ist ein Quotient von holomorphen Funktionen. Da der Nenner nie verschwindet, ist f also holomorph. Wir berechnen die Ableitung mit den üblichen Regeln:

$$f'(z) = \frac{z+i-(z-i)}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2}.$$

6. (a) Da f reellwertig ist, verschwinden die partiellen Ableitungen des Imaginärteils überall. Aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen ergibt sich dadurch, dass auch die partiellen Ableitungen des Realteils verschwinden müssen. Die Ableitung von f ist somit überall 0. Wir können damit zeigen, dass f auf Bällen konstant ist: Sei $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$, so dass $B_r(z_0) \subset \Omega$. Dann gilt für jedes $z \in B_r(z_0)$, dass $f(z) = f(z_0)$, da wir auf den Weg von z_0 nach z den Mittelwertsatz aus der reellen Analysis anwenden können mit $f' \equiv 0$. Da Ω offen und zusammenhängend in $\mathbb{C}$ ist, ist Ω sogar wegzusammenhängend. Wir finden also für jedes $z_1 \in \Omega$ einen Weg von z_0 nach z_1. Da Ω offen ist, können wir diesen so wählen, dass er stückweise aus geraden Segmenten besteht. f ist auf diesen konstant, also gilt $f(z_0) = f(z_1)$ für alle $z_1 \in \Omega$.

(b) Wie wir aus der Serie 1 wissen, wird der Einheitskreis ohne 1 mit der holomorphen Funktion $g : z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ auf die reelle Gerade abgebildet. Die Funktion $(g \circ f)|_{z:f(z)\neq 1}$ ist also holomorph und reellwertig, nach Teil (a) also konstant. Da g nirgends konstant ist, muss also $f|_{z:f(z)\neq 1}$ konstant sein. f nimmt also höchstens zwei Werte an. Falls es nur einer ist, sind wir fertig. Ansonsten ist einer der Werte 1, den anderen bezeichnen wir mit w. Die Urbilder dieser beiden Werte sind beide abgeschlossen, da f stetig ist. Ausserdem ist ihre Vereinigung ganz Ω – Dies steht im Widerspruch dazu, dass Ω zusammenhängend ist. Also kann f nur einen Wert annehmen und ist konstant.

7. Der folgende Code zeichnet die gewünschten Niveaulinen im Quadrat um -3 bis 3.

```
boundary = 3
x,y = var('x,y')
G = Graphics()
for c in range(0,7): # range erlaubt nur ganzzahlige Schritte, weshalb wir nachher c halbieren.
    G += implicit_plot(((x+I*y)**3).real() == c/2, (x,-boundary,boundary), (y,-boundary,boundary), color="blue", linewidth=(1+c)/7)
    G += implicit_plot(((x+I*y)**3).imag() == c/2, (x,-boundary,boundary), (y,-boundary,boundary), color="red", linewidth=(1+c)/7)
    G += implicit_plot(sqrt(x**2+y**2)**3 == c/2, (x,-boundary,boundary), (y,-boundary,boundary), color="green", linewidth=(1+c)/7)
    if c != 0:
        G += implicit_plot(((x+I*y)**3).real() == -c/2, (x,-boundary,boundary), (y,-boundary,boundary), color="blue", linewidth=(1+c)/7, linestyle='dashdot')
        G += implicit_plot(((x+I*y)**3).imag() == -c/2, (x,-boundary,boundary), (y,-boundary,boundary), color="red", linewidth=(1+c)/7, linestyle='dashdot')

G.show()
```