Musterlösung zur Serie 3

1. (a) Wir wenden die Invarianz auf $\zeta_1 := 1$ und auf $\zeta_2 := i$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
&\arg(a+ic) - \arg(1) = \arg(b+id) - \arg(i)\\
\Rightarrow &\pi/2 = \arg(b+id) - \arg(a+ic)\\
\Rightarrow &\exists r > 0 : \frac{b+id}{a+ic} = r \cdot i\\
\Rightarrow &b + id = iar - cr\\
\Rightarrow &b = -cr, d = ar.
\end{aligned}$$

Ähnlich gehen wir mit $\zeta_1 := 1$ und $\zeta_2 := 1+i$ vor:

$$\begin{aligned}
&\arg(a+ic) = \arg(A\zeta_2) - \pi/4\\
\Rightarrow &\arg(a - rc + i(c+ra)) = \arg(a+ic) + \pi/4\\
\Rightarrow &\arg((a+ic)(1+ir)) = \arg(a+ic) + \pi/4\\
\Rightarrow &\exists r' > 0 : 1 + ir = r' \cdot e^{i\pi/4}\\
\Rightarrow &r = 1, r' = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Damit ist also $b = -c$ und $d = a$, also ist A komplx linear.

(b) Wir gehen analog vor wie bei Teil (a) und untersuchen die Invarianz, wenn $\zeta_1 := 1$ und $\zeta_2 := i$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &|a+ic| = |b+id|\\
\Rightarrow &\exists \varphi \in \mathbb{R} : \frac{a+ic}{b+id} = e^{i\varphi}\\
\Rightarrow &a = b\cos\varphi - d\sin\varphi, c = d\cos\varphi + b\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $\zeta_2 := 1+i$ und erhalten beim Vergleichen mit $\zeta_1 = 1$

$$\begin{aligned}
&|a+ic| = \frac{1}{\sqrt{2}}|a+b+i(c+d)|\\
\Rightarrow &a^2 + c^2 = \frac{1}{2}((a+b)^2 + (c+d)^2) = a^2 + c^2 + ab + cd\\
\Rightarrow &ab + cd = 0\\
\Rightarrow &b(b\cos\varphi - d\sin\varphi) + d(d\cos\varphi + b\sin\varphi)\\
\Rightarrow &(b^2 + d^2)\cos\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Falls $b^2 + d^2 = 0$, so ist A die Nullmatrix, also komplex linear. Andernfalls ist $\varphi = \pm\pi/2$, woraus $a = \mp d$ und $c = \pm b$ folgt. Dies sind genau die Fälle anti-linear und linear.

2. (a) Wir suchen ein $v : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ gilt. Daraus ergibt sich der grobe Ansatz $v = \int \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}y$, den wir aber noch etwas konkreter machen müssen: Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$ ein Punkt, so dass

jeder weitere Punkte $(x, y) \in \Omega$ über eine gerades Wegstück $\gamma : [0, 1] \to \Omega, \gamma(t) = x_0 + iy_0 + t \cdot ((x - x_0) + i(y - y_0))$ erreicht werden kann. Dieser existiert, da Ω sternförmig ist. Dann gilt für ein potentielles v

$$(v \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial v}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot (\mathrm{Re}\gamma(t))' + \frac{\partial v}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot (\mathrm{Im}\gamma(t))'.$$

Wir setzen die erforderten Differentialgleichung ein und erhalten so

$$v(x+iy) = \int_0^1 (v\circ\gamma)'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 -\frac{\partial u}{\partial y}(\gamma(t))\cdot(\mathrm{Re}\gamma(t))' + \frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(t))\cdot(\mathrm{Im}\gamma(t))'\mathrm{d}t = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x.$$

(b) Wir leiten u je 2 mal nach x und y ab und wissen, dass die Summe dieser Terme für alle x, y gerade 0 sein muss.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6ax + 2by + 2cx + 6dy \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit dieses Polynom überall 0 ist, müssen alle Koeffizienten 0 sein, also $6a + 2c = 0$ und $2b + 6d = 0$. Wir erhalten also $u(x, y) = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3$. Nach Teil (a) integrieren wir nun von Zentrumspunkt $(0, 0)$ aus:

$$\begin{aligned}
v(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (3ax^2t^2 - 6dxyt^2 - 3ay^2t^2)y - (-3dz^2t^2 - 6axyt^2 + 3dy^2t^2)x\mathrm{d}t \\
&= dx^3 - 3a^2xy - 3dxy^2 - ay^3.
\end{aligned}$$

3. (a) Damit die Punkte $(0, 0, 1)$, (x_1, x_2, x_3) und $(x, y, 0)$ auf einer Gerade liegen, muss gelten:

$$\exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Anhand der dritten Zeile sehen wir, dass $t = \frac{1}{1-x_3}$ gelten muss. Damit sind $x = \frac{x_1}{1-x_3}$ und $y = \frac{x_2}{1-x_3}$, also $z = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$.

(b) Die obigen Gleichungen gelten natürlich auch hier, nur dass wir dieses Mal nach x_1, x_2, x_3 statt x, y auflösen:

$$\exists s \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $x_1 = sx$, $x_2 = sy$, $x_3 = 1 - s$. Der Punkt (x_1, x_2, x_3) muss ausserdem auf der Einheitskugel liegen also:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s^2(x^2 + y^2 + 1) - 2s + 1 \stackrel{!}{=} 1, s \neq 0.$$

Wir lösen nach s und erhalten $s = \frac{2}{x^2+y^2+1}$, somit

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \qquad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \qquad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Damit ist die Zuordnung bijektiv. Anhand der expliziten Darstellungen sehen wir auch, dass die Funktionen stetig differenzierbar sind.

4. (a) Eine Möbiustransformation hat die Form $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Aus $\varphi(z_0) = 0$ folgt $az_0 + b = 0$, also $b = -az_0$. Weiter folgt aus $\varphi(z_1) = 1$, dass $az_1 + b = cz_1 + d$, also $a = \frac{cz_1+d}{z_1-z_0}$ und somit $b = -z_0\frac{cz_1+d}{z_1-z_0}$. Schliesslich folgt aus $\varphi(z_2) = \infty$, dass $cz_2 + d = 0$, also $d = -cz_2$. Wir setzen alles ein und erhalten

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{cz_1-cz_2}{z_1-z_0}z - z_0\frac{cz_1-cz_2}{z_1-z_0}}{cz-cz_2} = \frac{(z-z_0)(z_1-z_2)}{(z-z_2)(z_1-z_0)}.$$

(b) Sei nun $\psi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Für 2 verschiedene z_k, z_l gilt

$$\psi(z_k) - \psi(z_l) = \frac{(ad-bc)(z_k-z_l)}{(cz_k+d)(cz_l+d)}.$$

Dann ist der Zähler von $w(\psi(z_0), \psi(z_1), \psi(z_2), \psi(z_3))$

$$(\psi(z_3) - \psi(z_0))(\psi(z_1) - \psi(z_2)) = \frac{(ad-bc)^2(z_3-z_0)(z_1-z_2)}{(cz_0+d)(cz_1+d)(cz_2+d)(cz_3+d)}.$$

Analog für den Nennern:

$$(\psi(z_3) - \psi(z_2))(\psi(z_0) - \psi(z_1)) = \frac{(ad-bc)^2(z_3-z_2)(z_0-z_1)}{(cz_0+d)(cz_1+d)(cz_2+d)(cz_3+d)}.$$

Durch Dividieren folgt die Behauptung.

5. (a) Sei z so, dass $\varphi(z) \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\varphi(z) = \overline{\varphi(z)}$, also

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\overline{az}+\bar{b}}{\overline{cz}+\bar{d}}.$$

Wir schreiben dies als quadratische Gleichung in z:

$$|z|^2(a\bar{c} - c\bar{a}) + z(a\bar{d} - c\bar{b}) + \bar{z}(b\bar{c} - a\bar{d}) + b\bar{d} - d\bar{b} = 0.$$

Falls nun $a\bar{c} - c\bar{a} = 0$, so ist dies eine Geradengleichung, da aus $ad - bc \neq 0$ auch $a\bar{d} - c\bar{b} \neq 0$ folgt. Andernfalls dividieren wir durch $a\bar{c} - c\bar{a}$ und ergänzen die Gleichung zu

$$\left| z - \frac{d\bar{a} - b\bar{c}}{a\bar{c} - c\bar{a}} \right| = \left| \frac{ad-bc}{a\bar{c} - c\bar{a}} \right|.$$

Dies ist eine Kreisgleichung.

(b) Wenn $w(z_0, z_1, z_2, z_3) = \varphi_{z_0,z_1,z_2}(z_3)$ reell ist, dann ist das Urbild von $\mathbb{R}$ unter φ eine Gerade oder ein Kreis. Aus der Konstruktion werden aber gerade alle z_i auf die (projektive) reelle Achse abgebildet, liegen also auch im Urbild.

Andernfalls liegen alle 4 Punkte auf einem Kreis, d.h. die Bilder von z_0, z_1, z_2 ist unter der Möbiustransformation φ_{z_0,z_1,z_2} auf der (projektiven) reellen Achse. Das Urbild dieser Achse ist also ein Kreis oder eine Gerade. Da 3 Punkte dies eindeutig bestimmen, kann es sich dabei nur um den geometrischen Ort handeln, der auch z_3 enthält. Somit ist auch $w(z_0, z_1, z_2, z_3) = \varphi_{z_0,z_1,z_2}(z_3)$ reell.

(c) Sei ψ eine Möbiustransformation und z_0, z_1, z_2, z_3 vier Punkte auf einem Kreis oder einer Geraden. Dann ist $w(z_0, z_1, z_2, z_3)$ nach Teil (b) reell. Gleichzeitig wissen wir aus Aufgabe 4 (b), dass

$$w(\psi(z_0), \psi(z_1), \psi(z_2), \psi(z_3)) = w(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}.$$

Damit liegen die 4 Punkte auch unter der Abbildung ψ auf einem Kreis oder einer Geraden.