Musterlösung zur Serie 4

1. Es gilt
$$f(x+iy) = x^2 + y^2 + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2ixy}{x^2+y^2}.$$
Wir leiten diese Funktion je einmal partiell nach x beziehungsweise y ab:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2iy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2ix(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$
Wir überprüfen nun die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen: Aus $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ folgt
$$\begin{aligned} 2x + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \Leftrightarrow 2x &= 2x\frac{x^2-y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \Leftrightarrow x &= 0 \text{ oder } (x^2+y^2)^2 = x^2-3y^2. \end{aligned}$$
Analog folgt
$$\begin{aligned} 2y - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \Leftrightarrow 2y &= 2y\frac{x^2-y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \Leftrightarrow y &= 0 \text{ oder } (x^2+y^2)^2 = 3x^2-y^2. \end{aligned}$$
Wir erhalten also 3 Fälle:
   - Falls $x = 0$, so gilt $y \neq 0$ per Definition. Dann ist aber die Gleichung $y^4 = -y^2$ aus der zweiten Cauchy-Riemann-Differentialgleichung nicht erfüllbar.
   - Falls $y = 0$, so gilt $x \neq 0$ per Definition. Die erste Cauchy-Riemann-Differentialgleichung gibt uns nun $x^4 = x^2$, also $x = \pm 1$. An den Punkten $z = \pm 1$ erfüllt f also die gewünschten Bedingungen
   - Falls sowohl $x \neq 0$ als auch $y \neq 0$, dann muss $3x^2 - y^2 = (x^2+y^2)^2 = x^2 - 3y^2$ gelten, also $2x^2 = -y^2$ – Dafür gibt es jedoch keine Lösung.

2. Der Hauptzweig des Logarithmus ist ausserhalb der Halbgeraden $w \in \mathbb{R}, w \leq 0$ definiert und auch analytisch. Wir müssen also z so bestimmen, dass $1 + z^5$ nicht auf dieser Halbgeraden landet, also $z^5 \notin \{x \leq -1\}$. In Polarkoordinaten $z =: re^{i\varphi}$ entspricht das $r < 1$ oder $\varphi \notin \left\{\frac{\pi+2\pi\mathbb{Z}}{5}\right\}$. Die Menge dieser Punkte ist offen und kann nicht vergrössert werden, ist also gerade die gesuchte Menge.

   Die Ableitung von f bestimmen wir wie üblich über die Kettenregel und erhalten $\frac{5z^4}{1+z^5}$.

3. (a) Wenn u harmonisch ist, dann ist die ergänzte Funktion $f := u + iv$ holomorph. Ausserdem ist v ebenfalls ein Polynom in x und y, wie wir beispielsweise Serie 3 entnehmen. Wir nutzen dies aus um zu zeigen, dass f ein Polynom in z und $\bar{z}$ ist: Wir schreiben $f(z) = f(x+iy)$ mit $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, so dass gilt

$$f(z) = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

Also ist f ein Polynom in z und $\bar{z}$. Nach Serie 2 gilt weiterhin $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, also ist f konstant in $\bar{z}$ und somit ein Polynom in z.

(b) Es reicht, die Aussage für Monome zu zeigen, da die restliche Aussage dann durch Linearkombinationen erfolgt. Sei also $u(x, y) = \mathrm{Re}(x+iy)^n = \sum_{\mu+2\nu=n} \binom{n}{2\nu}(-1)^\nu x^\mu y^{2\nu}$ und somit $f(z) = z^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) &= \sum_{\mu+2\nu=n} \binom{n}{2\nu}(-1)^\nu \frac{z^n}{2^n i^{2\nu}} \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{\mu+2\nu=n} \binom{n}{2\nu} \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{\mu+2\nu=n} \binom{n-1}{2\nu-1} + \binom{n-1}{2\nu} \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{0\leq m\leq n-1} \binom{n-1}{m} \\
&= \frac{z^n}{2} = \frac{f(z) - u(0,0)}{2}.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei implizit benutzt, dass $n \geq 1$ gilt. Für $n = 0$, also $u(x, y) = 1$, gilt $2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = 2 = f(0) - u(0, 0)$. Somit gilt also für jedes Monom der Form $f(z) = z^n$ die gewünschte Gleichung.

4. (a) Wir verwenden die Kettenregel. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial r} =& \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} =& \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin\varphi\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos\varphi\right)\sin\varphi, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} =& -r\sin\varphi\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r\sin\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}r\cos\varphi\right) - \frac{\partial u}{\partial x}r\cos\varphi \\
&+ r\cos\varphi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r\cos\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}r\sin\varphi\right) - \frac{\partial u}{\partial y}r\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Zusammenfassen dieser Terme mit den entsprechenden Vorfaktoren ergibt unter Verwendung der Additionstheoreme genau die gesuchte Aussage.

(b) Es gilt $\Delta u = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi} \equiv 0$. Da u unabhängig von φ ist, gilt $U_{\varphi\varphi} \equiv 0$. Wir erhalten also die Differentialgleichung $U_{rr} = -\frac{1}{r}U_r$. Wir schreiben $y = U_r$ und separieren:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{r} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}r}{r} + c \Rightarrow U_r = \frac{a}{r}, a := e^c$$

Also haben wir $u(r) = a \log r + b$ für reelle Parameter a und b.

5. (a) Die Funktion $\sin z$ als Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ ist surjektiv. Da jedoch $\sin(z+2\pi) = \sin(z)$ und $\sin(\pi/2 + z) = \sin(\pi/2 - z)$, reicht bereits der Streifen $\mathrm{Re}(z) \in [-\pi/2, \pi/2]$, um ganz $\mathbb{C}$ auszufüllen. Die beiden Randgeraden werden unter $\sin z$ auf die zwei Halbgeraden $\{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq 1\}$ abgebildet und fehlen somit im gesuchten Bild.

   (b) Es gilt

$$\begin{aligned}\tan z =& \frac{\sin z}{\cos z} = i\frac{1-e^{2iz}}{1+e^{2iz}}\\ =&(z \mapsto iz) \circ (z \mapsto \frac{1-z}{1+z}) \circ \exp(z) \circ (z \mapsto 2iz).\end{aligned}$$

   Es ergibt sich eine Abbildungskette

$$\{\mathrm{Re}(z) \in (-\pi/2, \pi/2)\} \to \{\mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\} \to \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}\backslash\{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq 1\} \to \mathbb{C}\backslash\{it \mid t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq 1\}.$$

   Für die Umkehrabbildung schreiben wir

$$\begin{aligned}w =& i\frac{1-e^{2iz}}{1+e^{2iz}}\\ \Rightarrow& w + we^{2iz} = i - ie^{2iz}\\ \Rightarrow& e^{2iz} = \frac{i-w}{i+w}\\ \Rightarrow& z = \frac{1}{2i}\log\frac{i-w}{i+w} =: \arctan(w).\end{aligned}$$