Musterlösung zur Serie 5

1. (a) Wir schreiben $f = u + iv$ und $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \\
&= \mathrm{Re} \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))) \cdot (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{Re} \int_a^b u(\gamma(t))\dot{x}(t) - v(\gamma(t))\dot{y}(t) + i\left(u(\gamma(t))\dot{y}(t) + v(\gamma(t))\dot{x}(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b u(\gamma(t))\dot{x}(t) - v(\gamma(t))\dot{y}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}(u(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)) + \mathrm{Re}(iv(\gamma(t))\dot{\gamma}(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}(u(\gamma(t) + iv(\gamma(t)))\dot{\gamma}(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_\gamma \mathrm{Re} f(z)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

(b) Es bezeichne $\tau(z) := \bar{z}$ die komplexe Konjugation sowie $\delta : [a, b] \to \mathbb{C}$ den abgeschlossenen Weg $f \circ \gamma$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z)\mathrm{d}z &= \int_\gamma \tau(f(z))f'(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{f\circ\gamma} \tau(w)\mathrm{d}w \\
&= \int_\delta \bar{w}\mathrm{d}w.
\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, dass der Realteil dieses Integrals verschwindet. Dies erhalten wir aber schnell mit Teil (a) sowie der Substitution $(f \circ \gamma)(t) = x(t) + iy(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re} \int_\delta \bar{w}\mathrm{d}w &= \int_\delta \mathrm{Re}\bar{w}\mathrm{d}w \\
&= \int_a^b x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t)\mathrm{d}t \\
&= \left(\int_{x(a)}^{x(b)} + \int_{y(a)}^{y(b)} \right) s\mathrm{d}s = 0.
\end{aligned}$$

2. Wir schliessen aus $|f(z) - 1| < 1$, dass f keine Nullstellen in Ω hat. Die Funktion $\frac{f'}{f}$ ist in Ω also wohldefiniert und holomorph. Wir substituieren

$$\int_\gamma (f(z))^{-1} f'(z)\mathrm{d}z = \int_{f\circ\gamma} w^{-1}\mathrm{d}w = \int_{f\circ\gamma} \frac{1}{w}\mathrm{d}w.$$

Da w im Ball mit Radius 1 um den Punkt 1 liegt, ist dies ist ein Integral einer holomorphen Funktion über einen geschlossenen Weg, nach dem Cauchy-Integralsatz also 0.

Bemerkung: *Wir werden später sehen, dass Rechnungen dieser Art leicht auf allgemeinere Funktionen mit isolierten Null- und Polstellen ausgeweitet werden können.*

3. Beide Seiten der Gleichung sind linear in P, es reicht also die Aussage für Monome $P(z) := z^n$ zu zeigen. Wir rechnen also

$$\begin{aligned}
\int_\gamma P(z)\mathrm{d}\bar{z} &= \int_0^1 \gamma(t)^n \overline{\dot{\gamma}(t)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (a + Re^{2\pi it})^n(-2i\pi Re^{-2i\pi t})\mathrm{d}t \\
&= -2i\pi R \int_0^1 (a + Re^{2\pi it})^n e^{-2i\pi t}\mathrm{d}t \\
&= -2i\pi R \int_0^1 \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} a^k R^{n-k} e^{2\pi it(n-k-1)}\mathrm{d}t \\
&= -2i\pi R \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} a^k R^{n-k} \int_0^1 e^{2\pi it(n-k-1)}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Dieses letzte Integral verschwindet, ausser $k = n-1$ ist erfüllt. In diesem Fall ist das Integral gerade 1. Wir fassen zusammen:

$$\int_\gamma P(z)\mathrm{d}\bar{z} = -2i\pi R^2 n a^{n-1} = -2i\pi R^2 P'(a).$$

4. Wir verwenden die Cauchy-Integralformel:

(a)

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-0}\mathrm{d}z = 2\pi i e^0 = 2\pi i.$$

(b)

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z = \int_{|z|=2} \left(\frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}\right)\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot (i/2 - i/2) = 0.$$

5. (a) Wir stellen fest, dass für $n \le 0$ der Integrand holomorph ist, nach dem Cauchy-Integralsatz ist dann das Integral 0. Andernfalls ($n > 0$) verwenden wir die Cauchy-Integralformel für höhere Ableitungen und erhalten

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-0)^n}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\,(e^z)|_{z=0}^{(n-1)} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

(b) Wir stellen zuerst fest, dass der Integrand holomorph ist, wenn sowohl n als auch m nicht-negativ sind. Dann ist das Integral also 0. Andernfalls ersetzen wir den Weg $|z| = 2$ durch die Wege $|z| = \frac{1}{2}$ und $|z-1| = \frac{1}{2}$, deren Verkettung homotop zum ursprünglichen Weg ist. Nach dem

Cauchy-Integralsatz ändert sich das Integral dadurch nicht. Wir rechnen nun

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} z^n(1-z)^m \mathrm{d}z &= (-1)^m \left(\int_{|z|=1/2} + \int_{|z-1|=1/2}\right) z^n(z-1)^m \mathrm{d}z \\ &= (-1)^m \left(\int_{|z|=1/2} \frac{(z-1)^m}{z^{-n}}\mathrm{d}z + \int_{|z-1|=1/2} \frac{z^n}{(z-1)^{-m}}\mathrm{d}z\right).\end{aligned}$$

Diese Terme können verschwinden, wenn n oder m nicht-negativ sind. Wir rechnen vorerst unter der Annahme weiter, dass beide n und m negativ sind.

$$\begin{aligned}&= (-1)^m \left(\frac{2\pi i}{(-n-1)!}\ (z-1)^m|_{z=0}^{(-n-1)} + \frac{2\pi i}{(-m-1)!}\ z^n|_{z=1}^{(-m-1)}\right) \\ &= (-1)^m \left(\frac{2\pi i}{(-n-1)!}(-n-1)!\binom{m}{m+n+1} + \frac{2\pi i}{(-m-1)!}\frac{n!}{(n+m+1)!}\right) \\ &= (-1)^m 2\pi i \left(\binom{m}{m+n+1} + \binom{n}{n+m+1}\right).\end{aligned}$$

Die Konventionen für Binomialkoeffizienten sind, dass $\binom{k}{l} = 0$ falls $k < 0$ oder $l < 0$ oder $k < l$, die wir so verwenden wollen. Falls nun $m, n > 0$, so ist $m+n+1 > m, n$, also stimmt die Formel auch im holomorphen Fall.

6. (a) Falls $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = 0$, so ist die Ungleichung erfüllt, da der Integrand der rechten Seite nirgends negativ ist. Wir nehmen also an, dass $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \neq 0$. Dann definieren wir $c := \frac{|\int_a^b g(t)\mathrm{d}t|}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$, eine komplexe Zahl vom Betrag 1. Dann gilt

$$\left|\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right| = c\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b cg(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(cg(t))\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(cg(t))\mathrm{d}t.$$

Dieser Ausdruck muss jedoch reell sein. Somit gilt

$$\left|\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right| = \int_a^b \mathrm{Re}(cg(t))\mathrm{d}t \leq \int_a^b |cg(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b |c||g(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b |g(t)|\mathrm{d}t.$$

(b) Die erste Ungleichung folgt mit Teil (a):

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\dot\gamma(t)|\mathrm{d}t = \int_\gamma |f(z)|\mathrm{d}|z|.$$

Die zweite folgt über ein Standardargument

$$\int_\gamma |f(z)|\mathrm{d}|z| = \int_a^b |f(\gamma(t))||\dot\gamma(t)|\mathrm{d}t \leq \sup_{z\in\Gamma}|f(z)|\int_a^b |\dot\gamma(t)|\mathrm{d}t = L(\gamma)\cdot\sup_{z\in\Gamma}|f(z)|.$$

(c) Wir parametrisieren $|z| = 1$ durch $\gamma(t) := e^{it}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} |z-1|\mathrm{d}|z| &= \int_0^{2\pi} |e^{it}-1||ie^{it}|\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} |e^{it}-1|\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t - 1)^2 + \sin^2 t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 2\sin(t/2)\mathrm{d}t = 8.\end{aligned}$$

7. Für gleichverteilte Stützpunkte $t_{k,n} := \frac{k}{n}$ erhalten wir

```
cases = [10,100,1000,10000]
for n in cases:
    sum = 0
    for k in range(n):
        # t_{k,n} = k/n
        # gamma(t) = exp(2*pi*I*t)
        # gamma'(t) = 2*pi*I*exp(2*pi*I*t)
        # f(gamma(t)) = exp(exp(2*pi*I*t))
        sum += 1/n*2*I*pi*exp(exp(2*pi*I*k/n) + 2*pi*I*k/n)

    print "n =", n," - Riemann-Summe = ", sum.numerical_approx(32)
```

Randomisiert können wir folgenden Code benutzen

```
cases = [10,100,1000]
tries = 5
for n in cases:
    for current in range(tries):
        sum = 0
        for k in range(n):
            t = random()
            sum += 1/n*2*I*pi*exp(exp(2*pi*I*t) + 2*pi*I*t)

        print "n =", n,", Versuch #",current+1," - Riemann-Summe = ", sum.numerical_approx(32), ", Betrag = ",abs(sum).numerical_approx(32)
```