Musterlösung zur Serie 6

1. Da die Funktion f holomorph ist, gibt es eine offene Umgebung U von 0, so dass sich f schreiben lässt als $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$. Weiterhin gilt $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Wir verwenden die Cauchy-Integralformel und erhalten für hinreichend grosse r

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(0)| &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \mathrm{d}\zeta \right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} L(\gamma) \sup_{|\zeta|=r} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} 2\pi r \frac{r^n}{r^{k+1}} = k! r^{n-k}. \end{aligned}$$

Für $r \to \infty$ erhalten wir also

$$|a_k| = \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq r^{n-k} \to 0 \quad \forall k > n.$$

Damit ist f ein Polynom vom Grad höchstens n.

2. Wir gehen ähnlich vor wie in Aufgabe 1. Für $|z| \leq \rho$ gilt

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi\rho \sup_{|\zeta|=\rho} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} \leq \frac{n!\rho M}{(\rho - |z|)^{n+1}}. \end{aligned}$$

3. Gleich wie in der vorherigen Aufgabe erhalten wir für $r < 1$

$$|f^{(n)}(0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \sup_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}} \leq \frac{n!}{r^n} \frac{1}{1-r}.$$

Der Nenner $r^n(1-r)$ nimmt dabei sein Maximum bei $r_0 := \frac{n}{n+1}$ an. Wir erhalten $|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$.

4. Wir schreiben $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ als Potenzreihe um 0 und betrachten die Koeffizienten a_n: Falls für n die Ungleichung $|f^{(n)}(0)| > n! n^n$ erfüllt ist, gilt

$$|a_n| = \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| > n^n.$$

Falls es nun also unendlich n gibt, so dass die Ungleichung erfüllt ist, so ist der Konvergenzradius $r = 1/\limsup \sqrt[n]{a_n} = 0$, was der Holomorphie von f widerspricht.

5. O.B.d.A. sei τ in der oberen Halbebene. Wir betrachten ein $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathrm{Im}(z_0 - n\tau) \in [0, \mathrm{Im}\tau)$ gilt. Weiterhin gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathrm{Re}(z_0 - n\tau - m) \in [0, 1)$ gilt. Es gilt $f(z_0 - n\tau - m) = f(z_0 - n\tau) = f(z_0)$. Wir haben also für jedes z_0 einen Repräsentanten in $M := \{\lambda + \mu \cdot \tau \mid \lambda, \mu \in [0, 1]\}$ gefunden, der den gleichen Funktionswert besitzt. Die Menge M ist kompakt und f als holomorphe Funktion auch stetig, d.h. f ist auf M und somit auch auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt. f ist also ganz und beschränkt und somit, nach dem Satz von Liouville, konstant.

6. Für die glatte Schleife γ_i finden wir eine Polarkoordinatendarstellung $\gamma_i(t) =: e^{h_i(t)}$. Die Windungszahlen lassen sich dann als

$$w(\gamma_i, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{1}{e^{h_i(t)}} e^{h_i(t)}\dot{h}_i(t)\mathrm{d}t = \frac{h_i(1) - h_i(0)}{2\pi i}$$

schreiben. Da die Windungszahlen gleich sind, erhalten wir daraus $h_1(1) - h_0(1) = h_1(0) - h_0(0)$. Wir behaupten nun, dass die glatte Funktion $\gamma_\lambda(t) := e^{(1-\lambda)h_0(t) + \lambda h_1(t)}$ für $\lambda \in [0, 1]$ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 definiert. Es ist klar, dass wir für $\lambda = 0, 1$ die entsprechenden Wege erhalten. Ausserdem ist für jedes $\lambda \in [0, 1]$ die Abbildung $\gamma_\lambda : [0, 1] \to \mathbb{C}^*$ ein geschlossener Weg, da $\gamma_\lambda(0) = \gamma_\lambda(1)$ aus $h_1(1) - h_0(1) = h_1(0) - h_0(0)$ folgt, womit $\{\gamma_\lambda(t)\}_{\lambda\in[0,1]}$ eine Homotopie ist.

7. (a) Wir zeigen erst, dass φ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Jacobi-Matrix invertierbar ist. Sei zu diesem Zweck $\gamma = u + iv$. Dann gilt

$$\varphi(t, \lambda) = \begin{pmatrix} u - \lambda\dot{v} \\ v + \lambda\dot{u} \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix ist also

$$d\varphi(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \dot{u} - \lambda\ddot{v} & -\dot{v} \\ \dot{v} + \lambda\ddot{u} & \dot{u} \end{pmatrix},$$

welche für hinreichend kleine λ invertierbar ist. Namentlich reicht

$$\lambda \le \varepsilon < \min_{t\in\mathbb{R}} \frac{\dot{u}(t)^2 + \dot{v}(t)^2}{|\dot{u}(t)\ddot{v}(t) + \dot{v}(t)\ddot{u}(t)|} > 0,$$

damit die Determinante positiv ist. Aus dem Satz über inverse Funktionen erhalten wir so, dass φ für hinreichend kleine ε lokal diffeomorph ist. Daraus folgt auch bereits, dass U_ε offen ist.

Damit können wir nun zeigen, dass φ für hinreichend kleine ε injektiv ist. Wir führen dazu einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass φ für jedes noch so kleine ε nicht injektiv ist. Dann gibt es Folgen $s_n, t_n \in [0, 1]$, $\lambda_n, \mu_n \to 0$ mit $(s_n, \lambda_n) \neq (t_n, \mu_n)$, so dass

$$\gamma(s_n) + i\lambda_n\dot{\gamma}(s_n) = \gamma(t_n) + i\mu_n\dot{\gamma}(t_n).$$

Die Folgen s_n, t_n sind in einer kompakten Menge, d.h. es gibt konvergente Teilfolgen mit Grenzwerten s bzw. $t \in [0, 1]$. Durch Missbrauch der Notation können wir also annehmen, dass $s_n \to s$, $t_n \to t$ gilt. Dann ist

$$\gamma(s) - \gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \gamma(s_n) - \gamma(t_n) = \lim_{n\to\infty} i(\mu_n\dot{\gamma}(t_n) - \lambda_n\dot{\gamma}(s_n)) = 0,$$

da $\dot\gamma(t)$ beschränkt ist und $\lambda_n, \mu_n \to 0$. Nun ist aber γ injektiv, d.h. es gilt $s = t$. In einer genügend kleinen Umgebung von $(s, 0) = (t, 0)$ ist der lokale Diffeomorphismus φ injektiv, in der sich für genügend grosse n auch (s_n, λ_n) und $(t_n, \mu_n$ befinden müssen. Dies widerspricht der Gleichung $\gamma(s_n) + i\lambda_n\dot\gamma(s_n) = \gamma(t_n) + i\mu_n\dot\gamma(t_n)$.

Wir fassen zusammen: Für hinreichend kleine ε ist φ ein lokaler Diffeomorphismus, der injektiv ist. Somit ist φ ein Diffeomorphismus auf sein Bild U_ε.

(b) Die Mengen $U_\varepsilon^\pm$ sind die Bilder $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times(0,\varepsilon)$ beziehungsweise $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times(-\varepsilon, 0)$ unter φ. Da diese Mengen zusammenhängend sind und φ stetig ist, ist auch ihr Bild zusammenhängend.

(c) Γ ist kompakt, also gibt es zum Punkt $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$ einen Punkt $z' \in \Gamma$, der in minimaler Entfernung zu z liegt. Die direkte Verbindungsstrecke von z zu z' kann Γ nur im Punkt z' treffen, da z' ja minimalen Abstand hat. Nun ist aber die disjunkte Vereinigung $U_\varepsilon = U_\varepsilon^- \cup \Gamma \cup U_\varepsilon^+$ eine Umgebung von z', d.h. die direkte Verbindungsstrecke enthält mindestens einen Punkt $z_0 \in U_\varepsilon^\pm = U_\varepsilon \setminus \Gamma$.

(d) Die beiden Mengen $U_\varepsilon^\pm$ liegen im Komplement von Γ und sind jeweils zusammenhängend. Das bedeutet, dass die Windungszahlen auf ihren Zusammenhangskomponenten konstant sind. Gleichzeitig müssen sich die Windungszahlen auf U_ε^- und U_ε^+ um genau 1 unterscheiden, weil die beiden Mengen durch den Weg γ getrennt sind. Aus Teil (c) wissen wir, dass jeder Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ in der Gleichen Wegzusammenhangskomponente liegt wie eines von $U_\varepsilon^\pm$. Also zerfällt $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ in genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, auf denen jeweils die Windungszahl konstant ist.