Musterlösung zur Serie 7

1. (a) Wir verwenden die geometrische Reihe und erhalten formal

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{k\geq 0}(1-z)^k = \sum_{k\geq 0}(-1)^k(z-1)^k.$$

Dies ist eine Taylorreihe um $z_0 = 1$ mit Konvergenzradius 1.

(b) Durch eine Partialbruchzerlegung erhalten wir 2 Summanden, auf die wir die geometrische Reihe anwenden können:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2-5z+6} &= \frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-z/3}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}(z/2)^k - \frac{1}{3}\sum_{k\geq 0}(z/3)^k\\ &= \sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}}\right) z^k.\end{aligned}$$

Dies ist eine Taylorreihe mit Konvergenzradius 2 um den Punkt $z_0 = 0$.

2. (a) Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n^2}$ ist 1, aber trotzdem konvergiert die Reihe für jedes z mit Betrag 1, da wir die absolute Konvergenz nachweisen können:

$$\left|\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2}\right| \leq \sum_{n\geq 1}\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(b) Die Reihe $\sum_{n\geq 0} z^n$ konvergiert für $|z| = 1$ nicht, da die Summanden keine Nullfolge bilden. Trotzdem ist der Konvergenzradius 1.

(c) Die Reihe $\sum_{n\geq 1}\frac{z^{2n}}{n}$ hat den Konvergenzradius 1. Sie divergiert für $z = \pm 1$, da wir dann die harmonische Reihe erhalten. Sie konvergiert hingegen für $z = \pm i$, da wir dann die alternierende harmonische Reihe startend mit -1 erhalten, die gegen $-\log 2$ konvergiert.

3. f hat eine Potenzreihenentwicklung, die wir anhand der Funktionalgleichung bestimmen wollen. Es gilt

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1} \stackrel{!}{=} z\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1} = zf(z).$$

Wir erhalten also durch Koeffizientenvergleich von z^0, dass $a_1 = 0$, und allgemein $(n+2)a_{n+2} = a_n$. Dadurch verschwinden alle ungeraden Koeffizienten, und für die geraden gilt $a_{2n+2} = \frac{a_{2n}}{2n+2} = \frac{1}{2}\frac{a_{2n}}{n+1}$, was induktiv mit $a_0 = 1$ in $a_{2n} = \frac{1}{2^n n!}$ resultiert. Wir erhalten also

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n n!} z^{2n} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\frac{z^2}{2}\right)^n = \exp\left(\frac{z^2}{2}\right).$$

Eine alternative Lösung geht wiefolgt: Wir schreiben formal $g = \log f$ und erhalten $g' = \frac{f'}{f} = z$. Die Stammfunktionen erfüllen also $\log f(z) = \frac{z^2}{2} + c$ und somit $f(z) = e^{\frac{z^2}{2}+c}$. Die Bedingung $f(0) = 1$ ergibt dann $c = 0$, also erhalten wir als Kandidaten für f die Funktion $f(z) = e^{\frac{z^2}{2}}$. Diese Funktion ist holomorph von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$, erfüllt $f(0) = 1$ und $f'(z) = z \cdot e^{\frac{z^2}{2}} = zf(z)$, also alle geforderten Bedingungen.

4. Aus der Potenzreihengleichung

$$\cos z \cdot \frac{1}{\cos z} = \left(\sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} \frac{E_n}{n!} z^n\right) = 1$$

sehen wir, dass $E_0 = 1$ gilt und ausserdem für den Koeffizienten von z^r

$$\sum_{2m+n=r} \frac{(-1)^m E_n}{(2m)!n!} = 0$$

wenn $r > 0$. Wir erhalten daraus induktiv, dass alle ungeraden Koeffizienten $E_{2n+1} = 0$ verschwinden. Damit hat die Potenzreihe von $1/\cos z$ die gewünschte Form.

Da $\cos z$ in $z = \pi/2$ eine Nullstelle hat und keine weitere Nullstelle von kleinerem Betrag hat, ist der Konvergenzradius von $1/\cos z$ gerade $\pi/2$.

Es fehlt noch die Ganzheit der E_{2n}: Für gerades $r = 2n$ ist der Koeffizient

$$\sum_{m+\nu=n} \frac{(-1)^m E_{2\nu}}{(2m)!(2\nu)!} = 0$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $(2n)!$ und stellen sie nach E_{2n} um:

$$E_{2n} = -\sum_{m+\nu=n} (-1)^m \binom{2n}{2\nu} E_{2\nu}.$$

Durch $E_0 = 1$ sind also alle Koeffizienten ganze Zahlen.