Musterlösung zur Serie 8

1. Die Ableitung $f'(z) = 3z^2 + 1$ hat Nullstellen in $z = \pm 1/\sqrt{3}$, f kann also maximal für $r = 1/\sqrt{3}$ injektiv sein. Wir zeigen, dass dies auch tatsächlich der Fall ist: Seien $w \neq z$ aus $B_{1/\sqrt{3}}(0)$. Dann ist

$$f(z) - f(w) = z^3 + z - w^3 - w = (z - w)(z^2 + zw + w^2 + 1).$$

Dieser Ausdruck ist nicht 0: Es gilt $z \neq w$ und

$$|z^2 + zw + w^2| \leq |z^2| + |z||w| + |w^2| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Also folgt aus $z \neq w$ dass $f(z) \neq f(w)$ innerhalb dieses Balles.

Für den Fall $f(z) = e^z$ benötigen wir ein anderes Vorgehen, da die Ableitung nie verschwindet. Dafür wissen wir, dass die Funktion $2\pi i$-periodisch ist, also $e^{-i\pi} = e^{i\pi}$. Sie kann also höchstens auf dem offenen Ball mit Radius π injektiv sein. Wir zeigen, dass dies auch der Fall ist: Sei $z_j = r_j e^{i\varphi_j} \in B_\pi(0)$ für $j = 1, 2$ mit $e^{z_1} = e^{z_2}$. Dann ist $\exp(r_1 \cos\varphi_1 + ir_1 \sin\varphi_1) = \exp(r_2 \cos\varphi_2 + ir_2 \sin\varphi_2)$. Wir erhalten durch Vergleichen der Real- und Imaginärteile die Gleichungen

$$r_1 \cos\varphi_1 = r_2 \cos\varphi_2, \qquad \exists k \in \mathbb{Z} : r_1 \sin\varphi_1 = r_2 \sin\varphi_2 + 2\pi k.$$

Da $|r_j| < \pi$ muss $k = 0$ gelten. Wir multiplizieren die beiden Gleichungen und betrachten die Differenz

$$0 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) = r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Falls ein $r_j = 0$ ist, so erhalten wir aus den vorherigen Gleichungen sofort, dass das andere r_{3-j} auch 0 ist, die Urbilder sind also gleich. Ansonsten muss $\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$ gelten. Dann gibt es ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi_2 = \varphi_1 + l\pi$. Es gilt dann $\sin\varphi_2 = \pm \sin\varphi_1$ und (mit dem gleichen Vorzeichen) ebenfalls für den Cosinus. Da die $r_j \geq 0$ sind, können die Vorzeichen nur positiv sein. Dann gilt aber $\varphi_1 = \varphi_2$ und sofort auch $r_1 = r_2$. Die Funktion ist auf diesem Ball also injektiv.

2. Die erste Ableitung von f verschwindet in 0, die zweite jedoch nicht. Wir haben also $n = 2$ und suchen eine Funktion φ mit

$$\cos z - 1 = \varphi(z)^2$$

Wir wenden die Verdoppelungsformel für den Sinus an und erhalten

$$\cos z - 1 = -2\sin^2(z/2) = \varphi(z)^2.$$

Die beiden Funktionen $\varphi(z) = \pm i\sqrt{2}\sin(z/2)$ erfüllen also die geforderten Bedingungen.

3. Wir suchen uns zuerst eine geeignete Umgebung U. Da f holomorph ist, gibt es eine Umgebung $B_\delta(0) \subset \Omega$. O.B.d.A. ist $\delta < 1$ (wir können es ja einfacher kleiner wählen), so dass aus $|z| < \delta$ sofort $|z^n| < \delta^n \leq \delta$ gilt, d.h. $z^n \in \Omega$. Also ist $U = B_\delta(0)$ geeignet für unser Unterfangen.

   Definiere nun $h(z) = f(z^n)$. Diese Funktion ist holomorph auf U und ihre ersten $n-1$ Abbildungen verschwinden im Ursprung: Es gilt

   $$h'(z) = nz^{n-1}f'(z^n),$$
   $$h''(z) = n(n-1)z^{n-2}f'(z^n) + n^2z^{2n-2}f''(z^n).$$

   Wir sehen, dass in diesem Prozess erst die n-te Ableitung in 0 nicht verschwindet, da der Exponent des ersten Terms 0 wird. Es gilt also $h^{(n)}(0) = n!f'(0) \neq 0$. Somit existiert eine Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $h(z) - h(0) = g(z)^n$. Diese Funktion erfüllt auch $f(z^n) = f(0) + g(z)^n$ für $z \in U$.

4. Wir nehmen an, dass f nicht dicht ist. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ und eine Umgebung $B_\delta(w)$, die nicht im Bild von f enthalten ist. Das heisst, dass $|f(z) - w| > \delta$ auf ganz $\mathbb{C}$ gilt. Die Funktion

   $$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}$$

   ist also holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und beschränkt durch $1/\delta$, somit nach dem Satz von Liouville konstant. Dann muss aber auch f konstant sein, was unseren Voraussetzungen widerspricht.

5. (a) Die Funktion g hat keine Nullstelle, da sie im Betrag immer grösser als f ist. Also ist die Funktion f/g holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und aus den Voraussetzungen beschränkt durch 1. Sie muss also nach dem Satz von Liouville konstant sein. Das bedeutet, dass es ein $c \in \mathbb{C}$ von Betrag kleiner 1 gibt, so dass $f(z)/g(z) = c$ gilt, also $f(z) = c \cdot g(z)$.

   (b) Nach Teil (a) gibt es ein komplexes c von Betrag kleiner 1, so dass $f' = c \cdot f$. Diese Differentialgleichung hat die Lösungen $f(z) = k\exp(cz)$ für $k \in \mathbb{C}$, welche auch alle die Voraussetzungen erfüllen.

6. Das Bild einer offenen, zusammenhängenden Menge unter einer nicht-konstanten, holomorphen Funktion ist nach dem Satz dem Offenheitssatz wieder offen. Die Menge Γ enthält aber als Bild eines Weges keine offene Mengen. Also muss f auf Zusammenhangskomponenten konstant sein, somit insbesondere auf Ω.