Musterlösung zur Serie 9

1. (a) Wenn $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)$ und $\lim_{z\to a}(z-a)^l g(z)$ beide existieren und nicht 0 sind, so existieren auch die Grenzwerte

$$\begin{aligned}\Big(\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)\Big)\cdot\Big(\lim_{z\to a}(z-a)^l g(z)\Big) &= \lim_{z\to a}(z-a)^{k+l} f(z)\cdot g(z),\\ \frac{\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)}{\lim_{z\to a}(z-a)^l g(z)} &= \lim_{z\to a}(z-a)^{k-l}\frac{f(z)}{g(z)},\\ \lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)+\lim_{z\to a}(z-a)^l g(z) &= \lim_{z\to a}(z-a)^{\max k,l}\big((z-a)^{k-\max k,l} f(z)\\ &\quad+(z-a)^{l-\max k,l} g(z)\big).\end{aligned}$$

In den ersten beiden Fällen existieren diese Grenzwerte und verschwinden nicht, die Funktionen $f\cdot g$ und $\frac{f}{g}$ haben also die algebraischen Ordnungen $k+l$ beziehungsweise $k-l$. Im dritten Fall existiert der Grenzwert sicher, aber er kann verschwinden wenn f und g die gleiche algebraische Ordnung haben. Die algebraische Ordnung von $f+g$ ist also das Maximum der beiden, falls f und g verschiedene algebraische Ordnungen haben. Falls sie gleich sind und $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) = -\lim_{z\to a}(z-a)^l g(z)$ gilt, so ist die algebraische Ordnung kleiner als $k=l$.

(b) Eine wesentliche Singularität a zeichnet sich dadurch aus, dass $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)$ für kein k existiert. Da sich der Fall $\frac{f}{g}$ durch die Substitution $h=1/g$ auf den Fall $f\cdot g$ zurückführen lässt, betrachten wir diesen nicht.
Habe also f eine wesentliche Singularität in a und g die algebraische Ordnung l in a. Dann gilt für alle k

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)g(z) = \lim_{z\to a}(z-a)^{k-l} f(z)(z-a)^l g(z) = \lim_{z\to a}(z-a)^{k-l} f(z)\lim_{z\to a}(z-a)^l g(z),$$

aber dieser Grenzwert existiert nicht. Das Aufteilen des Grenzwertprozesses ist erlaubt, da der zweite Faktor konvergiert, aber nicht gegen 0. Die Funktion $f\cdot g$ hat in diesem Fall also eine wesentliche Singularität in a (und damit auch f/g).
Auch für die Summe $f+g$ erhalten wir weiterhin eine wesentliche Singularität: Falls $k\geq l$, gilt

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k(f(z)+g(z)) = \lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)+(z-a)^k g(z) = \lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)+c$$

für ein $c\in\mathbb{C}$, der Grenzwert existiert also nicht. Für $k<l$ schreiben wir

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k(f(z)+g(z)) = \lim_{z\to a}\big((z-a)^l(f(z)+g(z))\big)\cdot(z-a)^{k-l}.$$

Bei beiden Faktoren existiert der Grenzwert nicht, also auch nicht der Grenzwert des Produkts.
Falls beide f und g eine wesentliche Singularität in a haben, so lässt sich nichts über die Singularität von $f\cdot g$ und $f+g$ sagen, da wir über $g=1/f$ bzw. $g=-f$ hebbare Singularitäten und mit leichten Modifikationen auch Pole erschaffen können.

2. Wir betrachten 3 Fälle für die unterschiedlichen Typen an Singularitäten:

   - Wenn a hebbar ist, so ist f in einer Umgebung U von a beschränkt. Dann ist aber auch das Bild $e^{f(U)}$ eine beschränkte Umgebung von $e^{f(a)}$, also hat e^f in a keinen Pol.
   - Wenn a ein Pol ist, existieren ein $c > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass $|f(z)| \geq c$ auf $B_\delta(a) \setminus \{a\} =: U$. Wir behaupten, dass es ein $r > 0$ mit $B := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} \subset f(U)$ gibt: Die Funktion $g(z) := 1/f(z)$ ist auf U beschränkt, so dass g durch $g(a) = 0$ fortsetzbar ist. Das Bild $f(U)$ liegt also in einer Umgebung $V = g(B_\delta(a))$ um 0, die somit einen offenen Ball $B_r(0) \subset V$ enthält. Dies ist äquivalent zu $B \subset f(U)$.

     Die Menge B enthält einen horizontalen Streifen der Höhe $2\pi i$, d.h. sie hat unter der $2\pi i$-periodischen Funktion $\exp(z)$ das gleiche Bild wie $\mathbb{C}$, und $\exp \mathbb{C} = \mathbb{C}^*$. Also ist $\exp f(U)$ dicht in $\mathbb{C}$, weshalb a eine wesentliche Singularität ist.
   - Da a wesentlich ist, ist das Bild $f(U)$ auf jeder Umgebung U von a dicht in $\mathbb{C}$. Damit ist auch $\exp f(U)$ dicht in $\mathbb{C}$, womit a wesentlich für e^f ist.

3. Für ein $a \in \mathbb{D}$ sei
$$b_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$
Wir behaupten, dass dies ein Diffeomorphismus von $\mathbb{D}$ auf sich selbst ist. b_a ist eine Möbiustransformation und also solche ein holomorpher Diffeomorphismus von $\mathbb{C}$ auf sich selbst. Wir müssen also nur noch zeigen, dass b_a nach $\mathbb{D}$ abbildet. Sei hierzu z vom Betrag 1. Dann ist
$$|b_a(z)|^2 = \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{|z|^2 + |a|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z}{1 + |a|^2|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z} = 1.$$
Der Einheitskreis wird also auf sich selbst abgebildet. Der Einheitskreis zerlegt $\mathbb{C}$ in die 2 Zusammenhangskomponenten $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ und $\mathbb{D}$. Damit muss das Bild von $\mathbb{D}$ eine dieser beiden Mengen sein. Da $b_a(a) = 0$ gilt letzteres. Wir stellen noch fest, dass die Umkehrfunktion von b_a gerade b_{-a} ist, denn $b_{-a}(0) = a$.

   Wir zeigen nun, dass jeder holomorphe Diffeomorphismus $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ von der Form $c \cdot b_a$ für ein komplexes c von Betrag 1 ist. Dann hat f eine eindeutige Nullstelle $a \in \mathbb{D}$. Für die holomorphe Funktion $g := f \circ b_{-a}$ gilt dann $g(0) = 0$. Diese Funktion ist bijektiv, es existiert also eine Inverse h mit $h(g(z)) = z$ auf $\mathbb{D}$. Wir leiten diese Gleichung ab und erhalten
$$1 = g'(z)h'(g(z)).$$
Für $z = 0$ bedeutet dies $1 = g'(0)h'(0)$. Nach dem Lemma von Schwarz gelten die beiden Ungleichungen $|g'(0)|, |h'(0)| \leq 1$, aber aus der oberen Gleichung muss hier jeweils Gleichheit herrschen. Wiederum nach dem Lemma von Schwarz existiert deshalb ein komplexes c von Betrag 1 mit $g(z) = cz$. Wir haben weiter $f = g \circ b_a = c \cdot b_a$ und unsere Behauptung bewiesen.

4. Für $z, c \in \mathbb{H}$ gilt $|z - c| < |z - \bar{c}|$, also bildet die Funktion
$$h_c(z) := \frac{z - c}{z - \bar{c}}$$

$\mathbb{H}$ holomorph nach $\mathbb{D}$ ab. Die Funktion ist ausserdem eine Möbiustransformation, die die reelle Achse auf den Einheitskreis abbildet. Damit ist h_c ein holomorpher Diffeomorphismus von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{D}$. Die Umkehrfuntion ist $h_c^{-1}(z) = \frac{c-\bar{c}z}{1-z}$.

Wir führen nun $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ in eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ über, so dass wir das Lemma von Schwarz anwenden können. Wir definieren $g := h_{f(z_0)} \circ f \circ h_{z_0}^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ für $z_0 \in \mathbb{H}$. Dann gilt $g(0) = 0$ und nach dem Lemma von Schwarz $|g(z)| \leq |z|$. Oder äquivalent:

$$|(h_{f(z_0)} \circ f)(z)| \leq |h_{z_0}(z)| \Leftrightarrow \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) - \overline{f(z_0)}}\right| \leq \left|\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}\right|$$

Dies war zu zeigen.

Wir zeigen die zweite Ungleichung und formen dafür um: Es gilt

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| \leq \left|\frac{f(z) - \overline{f(z_0)}}{z - \overline{z_0}}\right|.$$

Der Grenzwertprozess $z \to z_0$ ergibt uns dann links den Differentialquotienten und rechts die Imaginärteile, also

$$|f'(z_0)| \leq \frac{|2i\mathrm{Im}f(z_0)|}{|2i\mathrm{Im}z_0|} = \frac{\mathrm{Im}f(z_0)}{\mathrm{Im}z_0}.$$

Dies gilt für alle $z_0 \in \mathbb{H}$, womit die zweite Ungleichung bewiesen wäre.

Die beiden Ungleichungen stammen aus dem Schwarz'schen Lemma, d.h. sie sind genau dann Gleichungen, wenn $g = h_{f(z_0)} \circ f \circ h_{z_0}^{-1}$ ein holomorpher Diffeomorphismus ist. Da sowohl h als auch h^{-1} bereits solche sind, sind die Gleichungen also äquivalent dazu, dass f diffeomorph ist.

5. Sei $h : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ die (holomorphe, diffeomorphe) Cayley-Abbildung von der oberen Halbebene auf die Einheitskreisscheibe. Dann ist $g := h \circ f \circ h^{-1}$ ein holomorpher Diffeomorphismus von $\mathbb{D}$ auf sich selbst und hat somit nach Aufgabe 3 die Form $g(z) = e^{i\theta} \frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}$. Die Funktion $f = h^{-1} \circ g \circ h$ ist also eine Verkettung von 3 Möbiustransformationen und somit selbst eine, hat also die gewünschte Form, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

   Wir zeigen nun noch, dass die Koeffizienten reell sind: Da f ein Diffeomorphismus von $\mathbb{H}$ auf sich selbst ist, muss die Möbiustransformation den Rand $\mathbb{R}$ festhalten, d.h. für jedes reelle x ist auch $\frac{ax+b}{cx+d}$ reell und umgekehrt. Das bedeutet, dass jeweils die Bilder und auch die Urbilder von 0 und ∞ reell oder ∞ sein müssen. Wir erhalten dadurch insgesamt 4 Gleichungen mit jeweils 2 Variabeln aus a, b, c, d, die alle aussagen, dass die Variabeln jeweils ein reelles Vielfaches voneinander sind. Es gibt also ein (komplexes) $t \neq 0$, so dass $a = a't$, $b = b't$, $c = c't$, $d = d't$ mit $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ gilt. Dann ist aber $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$, d.h. die Koeffizienten der Möbiustransformation können reell gewählt werden.

6. Aus der Vorlesung kennen wir die Ungleichung

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

für $z \in \mathbb{D}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f \circ \gamma) &= \int_{f\circ\gamma} \frac{\mathrm{d}|z|}{1-|z|^2} = \int_a^b \frac{|(f\circ\gamma)(t)|\mathrm{d}t}{1-|(f\circ\gamma)(t)|^2} \\
&= \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)|\mathrm{d}t}{1-|f(\gamma(t))|^2} = \int_\gamma \frac{|f'(\zeta)|\mathrm{d}|\zeta|}{1-|f(\zeta)|^2} \\
&\leq \int_\gamma \frac{\mathrm{d}|\zeta|}{1-|\zeta|^2} = \mathcal{L}(\gamma).
\end{aligned}
$$

Die verwendete Ungleichung wird mit dem Lemma von Schwarz bewiesen, ist also sogar eine Gleichung falls f diffeomorph ist. Damit erhalten diffeomorphe f die hyperbolische Länge.