Musterlösung zur Serie 10

1. (a) Das Komplement von Ω in $\overline{\mathbb{C}}$ ist $\overline{\mathbb{D}} \cup \{\infty\}$. Diese Menge ist aber nicht zusammenhängend, da $\overline{\mathbb{D}}$ eine eigene Zusammenhangskomponente ist. Somit ist Ω nicht einfach zusammenhängend.

   (b) Das Komplement von Ω besteht aus 3 Halbgeraden, die sich im Unendlichen treffen. Somit gibt es zwischen je 2 Punkten in dieser Menge einen Weg, der sie verbindet. Sie ist also wegzusammenhängend und damit zusammenhängend, wodurch Ω einfach zusammenhängend ist.

   (c) Es ist aus der reellen Analysis bekannt, dass A zusammenhängend ist. Weiter ist auch $A \cup \{\infty\}$ zusammenhängend, da A unbeschränkt ist. Somit ist Ω zusammenhängend.

2. Die Menge Ω ist gerade die Menge Ω_1 aus der Aufgabe 7 der Serie 6. Das Komplement ist also $\Omega_0 \cup \Gamma \cup \{\infty\}$. Wir wissen aus besagter Aufgabe, dass Ω_0 zusammenhängend ist. Der Beweis der Aussage zeigt uns auch, dass $\Omega_0 \cup \Gamma$ zusammenhängend ist. Gleichzeitig ist Ω_0 unbeschränkt, also zusammenhängend mit $\{\infty\}$. Somit ist Ω einfach zusammenhängend.

3. (a) Wir definieren $g(z) := f(1/z)$. Dann gilt also mit $w := 1/z$

$$0 = \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to\infty} \frac{g(1/z)}{z} = \lim_{w\to 0} wg(w).$$

   Da $\mathbb{C} \setminus \Omega$ kompakt ist, gibt es eine punktierte Kreisscheibe $\dot{B}_{<r}(0)$ um 0, auf der g holomorph ist. Also hat g eine isolierte Singularität in 0. Diese ist aus $\lim\limits_{w\to 0} wg(w) = 0$ aber weder wesentlich noch ein Pol, also hebbar. Somit existiert der Grenzwert $\lim\limits_{w\to 0} g(w) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

   (b) Wenn f ein nicht-konstantes Polynom ist, dann gibt es $a, n, r > 0$, so dass $|f(z)| \geq a|z^n|$ für alle $|z| \geq r$. Also gilt $\lim\limits_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$.

   Habe nun f einen Pol in ∞. Dann folgt mit Teil (a)

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \infty \Rightarrow \lim_{z\to\infty} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow \lim_{z\to\infty} \frac{z}{f(z)} = c.$$

   Falls nun $c = 0$, so wiederholen wir das Prodezere, bis für ein n gilt:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z^n}{f(z)} = c \neq 0.$$

   Die Funktion $\frac{f(z)}{z^n}$ ist somit auf einer hinreichend grossen Menge $|z| > r$ beschränkt, d.h. es gibt ein C, so dass $|z| > r \Rightarrow |f(z)| < C|z|^n$ gilt. Nach Aufgabe 1 der Serie 6 ist f ein Polynom. f ist nicht konstant, weil $\lim\limits_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$ gilt.

4. (a) Offenbar ist ∞ eine isolierte Singularität von f. Da f injektiv ist, ist f nicht konstant. Gleichzeitig ist f ganz, und mit dem Satz von Liouville

also nicht beschränkt. Damit kann ∞ nicht hebbar sein. Die Singularität kann aber auch nicht wesentlich sein, da sonst f bereits in jeder Menge $|z| > c$ alle Werte annimmt, was der injektivität widerspricht. Somit ist ∞ ein Pol. Nach Aufgabe 3(b) ist f damit ein nicht-konstantes Polynom. Die einzigen Polynome, die injektiv sind, haben die Form $az+b$ mit $a \neq 0$.

(b) Aus der Funktionalgleichung folgt, dass f injektiv ist, d.h. f hat die Form $f(z) = az + b$. Ein kurzes Einsetzen ergibt nun $f(f(z)) = f(az + b) = a^2 z + ab + b$, also entweder $a = 1 \Rightarrow b = 0$ oder $a = -1 \Rightarrow b \in \mathbb{C}$, somit $f(z) = z$ oder $f(z) = -z + b$.

5. Wir reparametrisieren die Wege γ_i, um die Glattheit zu erzwingen und die weitere Handhabung zu vereinfachen: Sei $s : [0,1] \to [0,1]$ eine glatte Funktion, so dass s auf dem Intervall $[0,1/3]$ konstant 0 und auf dem Intervall $[2/3,1]$ konstant 1 ist. Falls m_i positiv ist, so definieren wir $\tilde{\gamma}_i(t) := \gamma_i(s(t))$, und andernfalls $\tilde{\gamma}_i(t) := \gamma_i(s(1-t))$. Dann ist $\tilde{\gamma} = \sum_i |m_i|\tilde{\gamma}_i$ ein zu γ äquivalenter Zyklus.

   Sei nun $m := \sum_i |m_i|$. Falls ein $\tilde{\gamma}_i$ geschlossen ist, so ist $\tilde{\gamma}_i$ bereits eine Schleife. Andernfalls gibt es, da $\tilde{\gamma}$ ein Zyklus ist, ein $\tilde{\gamma}_j$ mit $\tilde{\gamma}_i(1) = \tilde{\gamma}_j(0)$. Wir hängen also $\tilde{\gamma}_j$ an $\tilde{\gamma}_i$ und erhalten wieder einen Weg $\tilde{\gamma}^*_{i,j}$. Wir ersetzen im Zyklus $\tilde{\gamma}$ je eine Kopie von $\tilde{\gamma}_i$ und $\tilde{\gamma}_j$ durch den Weg $\tilde{\gamma}^*_{i,j}$ und verändern damit den Zyklus nicht – Dafür ist nun m um eins kleiner geworden, da wir 2 Wege mit einem ersetzt haben. Dieser Prozess des Entfernen von nicht-geschlossenen Wegen muss abbrechen, da $m > 0$ gelten muss. Der Abbruch findet genau dann statt, wenn der Zyklus $\tilde{\gamma}$ eine formale Summe von glatten Schleifen ist.

6. Wie vorhin sei $s : [0,1] \to [0,1]$ eine glatte Funktion, so dass s auf dem Intervall $[0,1/3]$ konstant 0 und auf dem Intervall $[2/3,1]$ konstant 1 ist. Wir definieren dann $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma_0(t) := i - ie^{2\pi i s(t)}$. Dies ist ein Kreis mit Radius 1 um i. Wenn wir diesen Weg skalieren und aneinanderhängen, so erhalten wir eine Schachtelung von kleiner werdenden Kreisen, so dass jede positive Zahl als Umlaufzahl vorkommt: Wir definieren $\gamma(t) : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} 3^{-n}\gamma_0(2^n t - 1), & t \in [1/2^n, 2/2^n], \\ 0, & t = 0, \\ 3^{-n}\overline{\gamma_0(2^n t - 1)}, & t \in [-2/2^n, -1/2^n]. \end{cases}$$

   Dann stellt γ auf dem Intervall $1/2^n \leq t \leq 2/2^n$ einen Kreis K_n^+ mit Radius 3^{-n} um den Mittelpunkt $i3^{-n}$ dar. Analog stellt γ auf dem Intervall $-2/2^n \leq t \leq -1/2^n$ einen Kreis K_n^i mit Radius 3^{-n} um den Mittelpunkt $i3^{-n}$ dar, hier aber mit negativem Umlaufsinn. Der Mittelpunkt des Kreises $K_n^\pm$ liegt aber jeweils ausserhalb des Kreises $K_{n+1}^\pm$, so dass die Umlaufzahl um die Mittelpunkte gerade $w(\gamma, \pm 3^{-n}) = \pm n$ ist. Aufgrund der Parametrisierung mit s ist γ auch überall glatt.