Musterlösung zur Serie 11

1. (a) Die Identitätsfunktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = z$ erfüllt die Bedingungen von Satz 4.17, weshalb es eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $e^f = \varphi$ gibt. Die Funktion f ist nur bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ estimmt, aber durch ein geeignetes Vielfaches erhalten wir tatsächlich einen Funktionszweig $\tilde{f}$, der auf $\Omega \cap (0, \infty)$ mit log übereinstimmt.

   Alternativ können wir auch den reellen Logarithmus auf ganz Ω erweitern, indem wir für einen Startpunkt $r \in (a, b) := \Omega \cap (0, \infty)$ und den Weg γ_z von $r \in \mathbb{R}$ nach $z \in \Omega$ die Funktion $\log z = \log r + \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} \mathrm{d}\zeta$ definieren. Da Ω einfach zusammenhängend ist, ist diese Funktion wohldefiniert.

   Wir definieren nun $g(z) := z^\alpha := e^{\alpha \log z}$. Diese Funktion ist wohldefiniert und als Verkettung holomorpher Funktionen wieder holomorph. Für reelle z entspricht sie auch der üblichen reellen Funktion.

   Analog klappt es mit $h(z) := z^z = e^{z \log z}$.

   (b) Falls der Schnitt leer ist, so können wir Ω soweit drehen, dass der Schnitt nichtleer ist.

   Falls U mehrere Intervalle enthält, so zeigt uns der Identitätssatz, dass unabhängig von der Konstruktionsart immer die gleiche Funktion herauskommen muss, da die Menge $\Omega \cap (0, \infty)$ Häufungspunkte enthält.

   (c) Wir stellen zuerst fest, das es aus Satz 4.11 einen Weg $\gamma \in Z(\Omega)$ und einen Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ gibt, so dass $w(\gamma, z) \neq 0$. Wegen $w(\gamma, \infty) = 0$ und dem Jordan'schen Kurvensatz (siehe Serie 6, Aufgabe 7) ist z demnach in der Zusammenhangskomponente A, weshalb $w(\gamma, z) = w(\gamma, 0)$ gilt. Es gilt also $w(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta} \mathrm{d}\zeta =: n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Die Funktion $1/z$ kann also in Ω keine Stammfunktion besitzen. Eine Logarithmusfunktion auf Ω hat als Ableitung aber gerade die Funktion $1/z$, wäre also eine Stammfunktion, die aber nicht existiert.

2. (a) Seien δ_1, δ_2 2 verschiedene Wege von z_0 nach z. Dann ist $\gamma := \delta_1 - \delta_2$ ein Zykel und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
g(\delta_1) &= w_0 \exp\left(\frac{1}{n} \int_{\delta_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta\right) \\
&= w_0 \exp\left(\frac{1}{n} \int_{\gamma+\delta_2} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta\right) \\
&= w_0 \exp\left(\frac{1}{n} \left(2\pi i n k + \int_{\delta_2} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta\right)\right) \\
&= w_0 \exp\left(\frac{1}{n} \int_{\delta_2} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta\right) = g(\delta_2).
\end{aligned}
$$

   (b) Sei γ_z ein Weg, auf dem f' keine Nullstelle hat (so ein γ_z existiert, weil f' holomorph ist.) Dann gibt es eine einfach zusammenhängende Umgebung $\Gamma' \subset \Omega$ des Bildes Γ von γ_z, auf der f' keine Nullstelle hat. Dann erfüllen

Γ' und f'/f die Bedingungen an Satz 4.17, es existiert also ein holomorpher Logarithmus $\log f$ auf Γ'. Somit ist $g = (w_0 \cdot \exp) \circ (1/n \cdot \log f)$ auf Γ' holomorph. Da wir dieses Prozedere für jedes $z \in \Omega$ durchführen können und aus Teil (a) immer die gleiche Funktion herauskommen muss, ist g überall holomorph.

(c) Wir leiten g ab und erhalten $g' = g \cdot \frac{1}{n} \frac{f'}{f}$. Dann ist $n \cdot g'/g = f'/f$. Da f und aus der Konstruktion g^n nicht verschwinden, gibt es eine Umgebung von z_0, auf der f und g^n Logarithmen haben. Für deren Ableitungen erhalten wir obige Gleichung, sie sind also Stammfunktionen der gleichen Funktion. Da $f(z_0) = w_0^n = g(z_0)^n$ gilt aber $\log g^n = \log f$ ohne weitere Konstante. Eine Anwendung der Exponentialfunktion gibt uns dann $g^n = f$, und auch hier muss aus dem gleichen Argument echte Gleichheit herrschen. Auf einer Umgebung um z_0, auf der Logarithmen existieren, haben wir die gewünschte Gleichung gezeigt, die somit dank dem Identitätssatz auf ganz Ω gelten muss.

3. (a) $f(z) := 1 - z^2$ und Ω erfüllen die Bedingungen der Aufgabe 2 mit $n = 2$: Es gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{2z}{1-z^2} = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$$

und für jeden Zykel γ gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z = -w(\gamma,1) - w(\gamma,-1).$$

Nach Voraussetzung haben ± 1 immer die gleiche Umlaufzahl, also ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = -2w(\gamma,\pm 1) \in 2\mathbb{Z}.$$

(b) Für $z = \sin w$ erhalten wir $\arcsin'(z) = 1/\sqrt{1-z^2}$.

(c) Der Sinus deckt auf dem Interall $[-\pi/2, \pi/2]$ und den um π verschobenen Translationen davon jeweils das Intervall $[-1,1]$ ab. Desweiteren gilt $\sin(\pi/2 + k\pi + iy) = \pm\cosh(y)$. Auf einer Halbgeraden $y > 0$ oder $y < 0$ deckt diese Funktion jeweils eine Halbgerade $\pm(1,\infty)$ ab. Die Menge $[-\pi/2,\pi/2] \cup \{\pm\pi/2 + iy \mid y > 0\}$ wird vom Sinus also bijektiv auf $\mathbb{R}$ abgebildet. Das "Innere" dieser Menge, $A := \{x + iy \mid x \in (-\pi/2, \pi/2), y > 0\}$, wird also auf eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ abgebildet, welche genau die obere und die untere Halbebene sind. Der Sinus ist auf A also surjektiv und holomorph. Da $\mathrm{Im}(\sin(i)) > 0$ ist das Bild die obere Halbebene. Wir zeigen, dass der Sinus auch injektiv ist: Seien $x+iy, u+iv \in A$ mit $\sin(x+iy) = \sin(u+iv)$. Wir setzen die Exponentialdarstellung des Sinus ein und schreiben $a := e^{ix}, b := e^y, c := e^{iu}, d := e^v$. Dann gilt

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{c}{d} - \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{ac+bd}{bc} = \frac{ac+bd}{ad}.$$

Alle a, b, c, d sind nicht 0. Ausserdem sind aus den Definitionen $|a| = |c| = 1$ mit $\mathrm{Re}a, \mathrm{Re}c > 0$ und $b, d \in (1,\infty)$. Damit ist $|ac| < bd$, wir dürfen also durch $ac + bd$ dividieren und erhalten $ad = bc$. Da $|a| = |c| = 1$ gilt $|b| = |d|$, also $b = d$. Damit folgt auch gleich $a = c$, womit der Sinus auf A injektiv ist. Der Sinus ist also eine biholomorphe Funktion $A \to \mathbb{H}$.

Nun nutzen wir die Eigenschaften des Sinus aus: Es gilt $\sin(z + \pi) = -\sin(z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$ Dadurch erhalten wir, dass $\sin(A+\pi) = \sin(A - \pi) = \sin(-A) = -\mathbb{H}$, also die untere Halbebene. Wir können A und $-A$ um weitere ganzzahlige Vielfache von π verschieben, um die gewünschte Zerlegung von $\mathbb{C}$ in offene, zusammenhängende Teilmengen zu erhalten, auf denen der Sinus jeweils biholomorph zur unteren oder oberen Halbebene ist.

(d) Prinzipiell berechnen wir das Integral, indem wir lokale Stammfunktionen einsetzen und dabei aufpassen, dass diese an den Endpunkten jeweils übereinstimmen.

Wir dazu verwenden unsere Zerlegung, um die vielen Blätter des Arcussinus zu beschreiben. Sei $A_0 := A$ aus (c) und $A_n := A_0 + n\pi$ die Translation um $n\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$. Desweiteren sei $B_0 = -A$ und analog $B_n := B_0 + n\pi$. Wir bezeichnen mit $a_n : \pm\mathbb{H} \to A_n$ und $b_n : \pm\mathbb{H} \to b_n$ die entsprechenden Zweigen des Arcussinus. Es gilt dabei, dass a_n für gerade n $\mathbb{H}$ abbildet und für ungerade n $-\mathbb{H}$. Für b_n ist es gerade umgekehrt.

Nun betrachten wir den Weg γ: Für $t \in (0, 1/2)$ verläuft er in der oberen Halbebene. Wir können also a_0 darauf anwenden und die Grenzwerte an den Intervallgrenzen betrachten: Da $r > 1$ führt der Weg von der Grenze zwischen A_1 und A_0 zu derjenigen zwischen A_0 und A_{-1}, d.h. es gibt $y_0, y_{1/2} > 0$ mit

$$\lim_{t \searrow 0} a_0(\gamma(t)) = \pi/2 + iy_0, \qquad \lim_{t \nearrow 1/2} a_0(\gamma(t)) = -\pi/2 + iy_{1/2}.$$

Analoges passiert auf dem Intervall $t \in (1/2, 1)$, und dort erhalten wir

$$\lim_{t \searrow 1/2} a_{-1}(\gamma(t)) = -\pi/2 + iy_{1/2}, \qquad \lim_{t \nearrow 1} a_{-1}(\gamma(t)) = -3\pi/2 + iy_0.$$

Nun berechnen wir die Ableitung der lokalen Stammfunktion und setzen dabei unseren Weg ein:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_n(\gamma(t)) = a_n'(\gamma(t))\gamma'(t), \qquad a_n'(\gamma(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2(t)}}.$$

Wir erhalten so für das Integral

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\int_\varepsilon^{1/2-\varepsilon} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_0(\gamma(t)) \right) \mathrm{d}t + \int_{1/2+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_{-1}(\gamma(t)) \right) \mathrm{d}t \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} a_0(\gamma(1/2 - \varepsilon)) - a_0(\gamma(\varepsilon)) + a_{-1}(\gamma(1 - \varepsilon)) - a_{-1}(\gamma(1/2 + \varepsilon)) \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

Wir bemerken noch, dass unsere Methode unabhängig vom gewählten Zweig des Arcussinus ist und für beliebige a_n bzw. auch b_n funktioniert.

(e) Im obigen Spezialfall folgt sofort, dass für einen Zykel $\gamma \in Z(\Omega)$

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z = 2\pi w(\gamma, 0)$$

gilt. Wir wollen dies auf beliebige Gebiete Ω verallgemeinern, sofern ± 1 in der gleichen Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \Omega$ liegen.

O.B.d.A sei γ ein geschlossener Weg in Ω. Wir können durch eine Homotopie annehmen, dass $\gamma(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \gamma'(t) \notin \mathbb{R}$ gilt und $\gamma(0)$ in der oberen Halbebene liegt. Desweiteren gehen wir Einfachheit halber davon aus, dass $\gamma(t) \neq 0$ für alle t.

Nun erweitern wir das Verfahren aus der Aufgabe (d). Aufgrund der gewählten Homotopie verläuft γ nie entlang der reellen Gerade. Wir bezeichnen die reellen Punkte von γ mit $0 < t_1 < \cdots < t_{2n} < 1$. Die Anzahl muss gerade sein, weil γ geschlossen ist. Wir unterteilen die reelle Gerade in die drei Intervalle $I_- := (-\infty, -1)$, $I_0 := (-1, 1)$ und $I_+ := (1, \infty)$. Dann verbindet jedes Wegstück $\gamma|_{[t_{j,j+1}]}$ zwei dieser Intervalle. Bei jedem t_j wechselt dabei γ den Zweig des Arkussinus, a_k oder b_k. Es gibt also für jedes j ein $g_j := a_n \circ \gamma$ oder $g_j := b_n \circ \gamma$, so dass wir den Weg γ vollständig durchlaufen und immer den Zweig berücksichtigen. Wenn wir dies alles zusammensetzen, erhalten wir mit $t_0 = 0$ und $t_{2n+1} = 1$

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{j=0}^{2n+1} \int_{t_j+\varepsilon}^{t_{j+1}-\varepsilon} g_j'(t)\mathrm{d}t \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

4. (a) Da die A_i gerade die Zusammenhangskomponenten des Komplements von Ω sind und die Windungszahl auf solchen konstant ist, hängt Φ nicht von der Wahl der a_i ab.

(b) $\Phi(0) = 0$ ergibt sich aus dem leeren Zyklus, der nirgends eine nichttriviale Windungszahl hat. $\Phi(\gamma_1 + \gamma_2) = \Phi(\gamma_1) + \Phi(\gamma_2)$ gilt, weil diese Eigenschaft für Windungszahlen gilt: $w(\gamma_1 + \gamma_2, z) = w(\gamma_1, z) + w(\gamma_2, z)$.

(c) Die Menge $B(\Omega)$ definiert sich gerade darüber, dass $w(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ gilt, also ist $B(\Omega) \subset \ker \Phi$. In die andere Richtung beachten wir, dass wir $w(\gamma, z) = 0$ für $z \in A_\infty$ noch nicht wissen. Das folgt aber daraus, dass $w(\gamma, \infty) = 0$ und A_∞ zusammenhängend ist. Damit ist $w(\gamma, \cdot)$ konstant 0 auf A_∞.

(d) Im Beweis von Satz 4.11 wird in der Richtung (ii) $\Rightarrow$ (i) ein Zykel um eine Zusammenhangskomponente des Komplements von Ω konstruiert. Damit können wir um jede Zusammenhangskomponente A_j einen Zykel γ_j konstruieren, so dass $w(\gamma_j, a_j) = 1$. Dann ist $\Phi(\sum_{j\neq\infty} m_j\gamma_j) = (m_1, \ldots, m_n)$ für ganzzahlige Koeffizienten m_j, und Φ also surjektiv.

$\Phi : Z(\Omega) \to \mathbb{Z}^n$ ist also ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $B(\Omega)$. Damit ist $Z(\Omega)/B(\Omega) \simeq \mathbb{Z}^n$, aber diese Gruppe ist gerade $H(\Omega)$.

5. (a) Wir betrachten die Menge $U := \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid f(z) = \infty\}$. Sie kann beschrieben werden durch $\{z \in \Omega_2 \mid f_2(z) = 0\}$ unter allfälliger Hinzunahme von ∞, falls der Punkt auf ∞ abgebildet wird. Als Nullstellenmenge der holomorphen Funktion f_2 ist die Menge diskret und abgeschlossen.

Falls sie ∞ nicht enthält, dann gibt es wegen der Stetigkeit von f eine Umgebung um ∞, in der kein Punkt von U liegt. U ist damit abgeschlossen und beschränkt, damit kompakt und somit (weil diskret) endlich.

Falls sie ∞ enthält, so ist $0 \in \Omega_4$. Da f_4 holomorph ist, gibt es eine Umgebung um 0, auf der f_4 keine weitere Nullstelle enthält. Das ist aber äquivalent dazu, dass f in einer Umgebung von ∞ keinen weiteren Pol enthält. Nun können wir gleich wie im Fall $f(\infty) \neq \infty$ schliessen, dass $U \setminus \{\infty\}$ endlich ist, und ein weiterer Punkt ändert natürlich nichts daran.

Da U das Komplement von $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$ enthält, haben wir somit die Aussage für Ω_1 bewiesen.

Für die anderen 3 Mengen gehen wir gleich vor, indem wir die Funktion f mit der Funktion $1/z$ geeignet verknüpfen.

(b) Nach Teil (a) hat f endlich viele Pole $z_1, \ldots, z_s$. Seien $n_1, \ldots, n_s$ deren Polordnungen. Die Funktion $g(z) := f(z) \cdot \prod_{i=1}^{s}(z - z_i)^{n_i}$ ist dann eine holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Falls g in ∞ einen Pol hat oder hebbar ist, so ist g nach Aufgabe 10.3 ein Polynom und f somit rational.

Falls ∞ wesentlich ist, dann ist 0 eine wesentliche Singularität von f_3. Dann hat aber f_3 keinen Pol in 0 und ist somit nicht holomorph nach $\overline{\mathbb{C}}$, das ist ein Widerspruch zu f holomorph.

(c) Wenn f bijektiv ist, hat f genau eine Polstelle und eine Nullstelle. Die Anzahl Faktoren im Zähler und Nenner sind also gerade 1, womit f eine Möbiustransformation ist.