Musterlösung zur Serie 12

1. Wir schreiben $b_k := \frac{c_k}{k+1}$ sowie $b_{-1} := 0$. Dann können wir F in 2 Reihen aufteilen und deren Konvergenz bestimmen:

$$F(z) = \sum_{k \leq -2} b_k (z-a)^k + \sum_{k \geq 0} b_k (z-a)^k.$$

Die zweite Reihe ist eine übliche Potenzreihe mit Konvergenzradius

$$\frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |b_k|^{1/k}} \geq R_1.$$

Sie konvergiert also auf $|z-a| < R_1$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.

Die Reihe $g(z) := \sum_{k\geq 2} b_{-k} z^k$ hat den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |b_{-k}|^{1/k}} \geq \frac{1}{R_0}.$$

Wir stellen fest, dass $g\left(\frac{1}{z-a}\right)$ gerade die erste Reihe von F ist, welche somit für $\frac{1}{|z-a|} < \frac{1}{R_0}$, also $|z-a| > R_0$ konvergiert.

Zusammengesetzt konvergiert F also auf $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid R_0 < |z-a| < R_1\}$ absolut und somit auf kompakten Teilmengen gleichmässig.

Nach dem Satz von Weierstrass konvergiert dann auch die Ableitung F' auf Ω gleichmässig. Wir dürften also gliedweise ableiten und erhalten gerade die gewünschte Funktion.

Falls c_{-1} nicht 0 ist, so hat die Funktion f in $z = a$ das Residuum c_{-1}, d.h. ein Integral mit Windungszahl 1 um a in Ω ergibt $2\pi i c_{-1}$. Damit kann f keine Stammfunktion auf Ω besitzen. Sonst ändert sich aber nichts, da ein einzelner Koeffizient nichts an der Konvergenz verändern kann.

2. (a) Wir zeigen erst, dass die Laurentreihe mit einem einfachen Pol beginnt, begründen danach die Rationalität und zeigen daraufhin, warum alle geraden Terme ausser $-\frac{1}{2}z^0$ verschwinden.

Die Funktion $e^z - 1$ hat in $z = 0$ eine einfache Nullstelle. Die Laurentreihe von $\frac{1}{e^z-1}$ startet also bei z^{-1}. Wir schreiben

$$1 = \frac{1}{e^z-1} \cdot (e^z - 1) = \left(\sum_{n\geq -1} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{m \geq 1} \frac{z^m}{m!}\right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{\substack{k+l=n \\ k\geq -1, l \geq 1}} \frac{a_k}{l!}\right) z^n$$

und führen einen Koeffizientenvergleich durch. Für $n = 0$ erhalten wir $a_{-1} = 1$ und damit für $n = 1$ die Gleichung $a_0 + \frac{a_{-1}}{2} = 0$, also $a_0 = -1/2$.

Für $n \geq 1$ muss der resultierende Koeffizient 0 sein. Wir können diese Gleichung also nach a_n umstellen und erhalten

$$a_n = -\sum_{1 \leq l \leq n-1} \frac{a_{n-l}}{l!} \in \mathbb{Q}.$$

Nun zeigen wir noch, dass alle anderen Terme von geraden Exponenten verschwinden: Die Funktion $f(z) := \frac{1}{e^z - 1} + \frac{1}{2}$ erfüllt

$$f(-z) = \frac{1}{e^{-z} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{-2e^z + e^z - 1}{e^z - 1} = -\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{2} = -f(z).$$

Sie ist damit ungerade und kann somit nur Terme mit ungeraden Exponenten besitzen.

(b) Es gilt

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})}{\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})} = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1}.$$

Nach Teil (a) gilt dann

$$\begin{aligned}\cot(z) &= i + 2i\left(\frac{1}{2iz} - \frac{1}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}(2iz)^{2k-1}}{(2k)!}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}(2i)^{2k} z^{2k-1}}{(2k)!} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k B_{2k} 2^{2k} z^{2k-1}}{(2k)!}.\end{aligned}$$

(c) Aus $\cot \cdot \sin = \cos$ folgt

$$\left(\frac{1}{z} + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k B_{2k} 2^{2k} z^{2k-1}}{(2k)!}\right) \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt hier $B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}$.

3. (a) Die Funktion $\frac{1-\cos(z)}{z^2}$ kann höchstens in 0 eine Singularität haben. Aus der Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1 - \cos(z)}{z^2} = \frac{1 - \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}{z^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+2)!}$$

sehen wir, dass diese hebbar ist. Somit ist das Residuum in 0 auch 0.

(b) Die Funktion $e^{1/z} + 1/z$ hat nur in $z = 0$ eine Singularität. Ihre Laurentreihe ist

$$e^{1/z} + 1/z = \frac{1}{z} + \sum_{k \geq 0} \frac{z^{-k}}{k!} = 1 + \frac{2}{z} + \sum_{k \geq 2} \frac{z^{-k}}{k!}.$$

Diese Reihe hat unendlich viele Terme mit negativen Exponenten, also ist 0 eine wesentliche Singularität. Das Residuum in 0 ist 2.

(c) Die Funktion $\frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n}$ hat in $\pm i$ jeweils einen n-fachen Pol. Wir berechnen das Residuum in i:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left(\frac{1}{(z+i)^n}\right)\Big|_{z=i} &= \frac{1}{(n-1)!}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(z+i)^{2n-1}(n-1)!}\Big|_{z=i}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{((n-1)!)^2}\frac{1}{(2i)^{2n-1}}\\ &= \frac{-i(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-1}}.\end{aligned}$$

Analog folgt, dass das Residuum in $-i$ das komplex konjugierte davon, also $\frac{i(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-1}}$ ist.

(d) Die Funktion $(z+2)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$ hat nur in $z=-2$ eine Singularität. Aus der Potenzreihenentwicklung des Sinus erhalten wir die Laurentreihe

$$(z{+}2)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) = (z{+}2)\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(z+2)^{-2n-1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(z+2)^{-2n}}{(2n+1)!}.$$

Damit muss -2 eine wesentliche Singularität mit Residuum 0 sein.

(e) Der Nenner $h(z) := 1+z^n$ hat einfache Nullstellen in den Punkten $z_k := e^{i\pi(2k+1)/n}$, womit die zu untersuchenden Funktion Singularitäten in diesen Punkten z_k hat. Dort gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z_k\right) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{g(z_k)}{nz_k^{n-1}} = -\frac{z_k}{n}g(z_k).$$

Die Funktion hat also eine hebbare Singularität, falls $g(z_k)=0$, und ist sonst ein einfacher Pol mit Residuum $-\frac{z_k}{n}g(z_k)$.

(f) Die Funktion $f(z) = \frac{4z}{(z^2+2az+1)^2}$ hat doppelte Pole in $z_{1,2} = a\pm\sqrt{a^2-1}$. Das Residuum in z_1 ist dann

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,z_1) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-z_1)^2 f(z)\right)\Big|_{z=z_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{4z}{(z-z_2)^2}\right)\Big|_{z=z_1}\\ &= \frac{4(z_1-z_2)-8z_1}{(z_1-z_2)^3} = \frac{a}{(a^2-1)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Analog berechnet man das Residuum in z_2, es ist $-\frac{a}{(a^2-1)^{3/2}}$.

4. (a) Der Integrand $f(z)$ hat 3 Pole, nämlich einen doppelten Pol in $z_0 = 0$ und je zwei einfache Pole $z_{1,2} = -1\pm i$. Alle Pole liegen innerhalb des Integrationsweges $|z|=3$ und tragen deshalb zum Integral bei. Wir

berechnen die Residuen.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z_0) &= \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{e^{tz}}{z^2+2z+2}\right)\Big|_{z=0} \\
&= \left(\frac{e^{zt}(tz^2+2z(t-1)+2(t-1))}{(z^2+2z+2)^2}\right)\Big|_{z=0} = \frac{t-1}{2}. \\
\operatorname{Res}(f, z_1) &= \frac{e^{zt}}{z^2(z-z_2)}\Big|_{z=z_1} = \frac{e^{(-1+i)t}}{2i(-1+i)^2} = \frac{e^{(-1+i)t}}{4}. \\
\operatorname{Res}(f, z_2) &= \frac{e^{zt}}{z^2(z-z_1)}\Big|_{z=z_2} = \frac{e^{(-1-i)t}}{2i(-1-i)^2} = \frac{e^{(-1-i)t}}{4}.
\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{tz}}{z^2(z^2+2z+2)}\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=0,1,2} \operatorname{Res}(f, z_j) = \frac{t-1}{2} + \frac{\cos t}{2e^t}.$$

(b) Wir verwenden $\cosh z = \cos(iz)$ und $\sinh z = -i\sin(iz)$. Damit hat $\cosh z$ innerhalb von $|z| = 5$ die Nullstellen $\pm i\pi/2$ und $\pm 3i\pi/2$, die alle einfach sind. Wir haben also 4 Residuen zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, i\pi/2) &= \frac{e^z}{\cosh'(z)}\Big|_{z=i\pi/2} = \frac{i}{-i\sin(-\pi/2)} = 1, \\
\operatorname{Res}(f, -i\pi/2) &= 1, \\
\operatorname{Res}(f, 3i\pi/2) &= \frac{e^z}{\cosh'(z)}\Big|_{z=3i\pi/2} = \frac{-i}{-i\sin(-3\pi/2)} = 1, \\
\operatorname{Res}(f, -3i\pi/2) &= 1.
\end{aligned}$$

Damit ist das gesuchte Integral $2\pi i \cdot 4 = 8\pi i$.

(c) Der Integrand f hat innerhalb des Weges den einfachen Pol $z_0 = 0$ und den doppelten Pol $z_1 = 1$. Die Residuen sind

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, 0) &= \frac{2+3\sin(\pi z)}{(z-1)^2}\Big|_{z=0} = 2, \\
\operatorname{Res}(f, 1) &= \left(\frac{2+3\sin(\pi z)}{z}\right)'\Big|_{z=1} = -\frac{2}{z^2} + 3\frac{\pi z\cos(\pi z) - \sin(\pi z)}{z^2}\Big|_{z=1} = -2-3\pi.
\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir $\int_\Gamma \frac{2+3\sin(\pi z)}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z = -6\pi^2 i$.

5. Der Integrand hat einfache Pole in $\pm i$ mit Residuen $\pm\frac{1}{2i}$. Es gilt also

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{w(\gamma, i) - w(\gamma, -i)}{2i} = \pi(w(\gamma, i) - w(\gamma, -i)) \in \pi\mathbb{Z}.$$

Alle Werte $k \cdot \pi$ können auch angenommen werden, indem der Pol i k-fach umlaufen wird.