Musterlösung zur Serie 13

1. (a) Wir verwenden die Verdoppelungsformel des Cosinus schreiben den Integranden um, so dass wir ein Wegintegral um $|z| = 1$ verwenden können.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2(x)} &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2(x)} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\frac{1-\cos(2x)}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{2\mathrm{d}x}{2a+1-\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{-4e^{2ix}\mathrm{d}x}{e^{4ix}-2(2a+1)e^{2ix}+1} \\
&= i\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2-2(2a+1)z+1} = -2\pi \sum_{w\in\mathbb{D}} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-2(2a+1)z+1}, w\right) \\
&= -2\pi \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-2(2a+1)z+1}, (1+2a)-2\sqrt{a^2+a}\right) \\
&= -2\pi \frac{1}{-2\cdot 2\sqrt{a^2+a}} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}.
\end{aligned}$$

Die Nullstellen des Polynoms im Nenner des Integranden sind $1+2a \pm 2\sqrt{a^2+a}$, von denen nur eine in $\mathbb{D}$ liegt.

(b) Wir gehen ähnlich vor wie in (a) und drücken das Integral als Wegintegral im $|z| = 1$ aus.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3x)}{5-4\cos(x)}\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}}{5-4\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(e^{3ix}+e^{-3ix})\mathrm{d}x}{10-4(e^{ix}+e^{-ix})} = -i\int_0^{2\pi} \frac{(e^{6ix}+1)ie^{ix}\mathrm{d}x}{10e^{4ix}-4e^{5ix}-4e^{3ix}} \\
&= \frac{i}{2}\int_{|z|=1} \frac{(z^6+1)\mathrm{d}z}{z^3(2z-1)(z-2)} = -\pi\left(\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,1/2)\right) \\
&= -\pi\left(\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right) = \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

(c) Wir nützen aus, dass der Integrand eine gerade Funktion ist und verwenden dann Korollar 4.49.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\mathrm{d}x = \pi i \sum_{\mathrm{Im}z>0} \mathrm{Res}(f,z) \\
&= \pi i \left(\mathrm{Res}(f,i\sqrt{2})+\mathrm{Res}(f,i\sqrt{3})\right) = \pi i\left(\frac{i\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

(d) Erneut erleichtert Korollar 4.49 die Aufgabe deutlich.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{(x^2+9)(x^2+1)}\mathrm{d}x \\ &= 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}z>0}\mathrm{Res}(f,z) = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,3i)+\mathrm{Res}(f,i)\right) \\ &= 2\pi i\left(\frac{3i+7}{48i}-\frac{1-i}{16i}\right) = \frac{5\pi}{12}.\end{aligned}$$

(e) Und wieder Korollar 4.49 unter Ausnutzung der Geradheit des Integranden.

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\mathrm{d}x = \pi i\mathrm{Res}(f,ia) = \frac{\pi i}{16ia^3} = \frac{\pi}{16a^3}.$$

(f) Nun verwenden wir Korollar 4.52 mit der Exponentialdarstellung des Cosinus. Auch hier ist der Integrand gerade.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\cos(x)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\pi i\sum_{\mathrm{Im}z>0}\mathrm{res}\left(\frac{e^{ix}}{x^2+a^2},z\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{e^{ix}}{x^2+a^2},ia\right)\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{\pi i e^{-a}}{2ia}\right) = \frac{\pi}{2ae^a}.\end{aligned}$$

(g) Korollar 4.52 mit einer geraden Funktion.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\pi i\sum_{\mathrm{Im}z>0}\mathrm{Res}\left(\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2},z\right)\right) = \mathrm{Im}\left(\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2},ia\right)\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{\pi i}{2e^a}\right) = \frac{\pi}{2e^a}.\end{aligned}$$

(h) Wieder die gleiche Prozedur, dieses Mal ist aber die Umwandlung in die gewünschte Form etwas aufwändiger.

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(2ax)\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2iax}\mathrm{d}x}{1+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2a}\frac{e^{ix}\mathrm{d}x}{1+(x/2a)^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \frac{2a}{4}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}\mathrm{d}x}{4a^2+x^2}\right) \\
&= \frac{\pi i}{2}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+x^2}, i\right) - \frac{a}{2}\mathrm{Re}\left(2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{ix}}{4a^2+x^2}, 2ai\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - a\mathrm{Re}\left(\frac{\pi i}{4aie^{2a}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4e^{2a}} = \frac{\pi}{4e^{2a}}(e^{2a}-1).
\end{aligned}
$$

2. Wir berechnen die Residuen von $g \cdot f'/f$ analog zum Beweis des Satzes über das Prinzip des Arguments. Für jede Nullstelle a_k von f gibt es eine holomorphe Funktion $h_k : B_{r_k}(a_k) \to \mathbb{C}$, die

$$f(z) = (z-a_k)^{m_k} h_k(z)$$

lokal erfüllt und keine Nullstelle hat. Wir folgern analog

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_k}{z-a_k} + \frac{h_k'(z)}{h_k(z)} \Rightarrow g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g(z)m_k}{z-a_k} + g(z)\frac{h_k'(z)}{h_k(z)}$$

und schliessen daraus, dass

$$\mathrm{Res}\left(g \cdot \frac{f'}{f}, a_k\right) = g(a_k)m_k$$

gilt. Nun können wir den Residuensatz anwenden und erhalten die gewünschte Formel.

3. Wir nehmen $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $K := B_1(1)$ und $f(z) = \log(z)$, Hauptzweig. Dann ist f auf K holomorph und kann entlang stetigen Wegen fortgesetzt werden, aber die Fortsetzung hängt vom Weg ab und es existiert keine analytische Fortsetzung auf ganz Ω.

4. Auf $|z| = 1$ wird das Polynom durch das Monom $6z^3$ dominiert. Genauer gilt für $g(z) = 6z^3$ und $f(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ auf $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| = |z^7 - 2z^5 - z + 1| \leq 1 + 2 + 1 + 1 = 5 < |6z^3| = |g(z)|.$$

Damit haben f und g auf $\mathbb{D}$ die gleiche Anzahl Nullstellen mit Vielfachheiten, nämlich deren 3.

5. Die Hilfsfunktion $f(z) := h(z) - z$ wird auf $|z| = 1$ von $g(z) := -z$ dominiert:

$$|f(z) - g(z)| = |h(z)| < 1 = |g(z)|.$$

g und somit f haben also genau eine Nullstelle, womit h genau einen Fixpunkt auf $\mathbb{D}$ besitzt.

6. Wir vergleichen die Funktionen $f(z) := ze^{\lambda - z} - 1$ und $g(z) := ze^{\lambda - z}$. Auf $|z| = 1$ gilt dann $\mathrm{Re}(\lambda - z) > 0$ und somit

$$|f(z) - g(z)| = 1 < |e^{\lambda - z}| = |g(z)|.$$

Wir haben in $\mathbb{D}$ also gleich viele Nullstellen für f wie für g, nämlich genau eine.

Wir betrachten nun die zuvor definierte Funktion f auf dem Intervall $[0, 1]$: Sie ist stetig und erfüllt $f(0) = -1$ und $f(1) = e^{\lambda - 1} - 1 > 0$, da ja $\lambda > 1$. Nach dem Zwischenwertsatz muss f dann eine reelle Nullstelle auf diesem Intervall haben.

7. Wir bestimmen die Nullstellen in den Gebieten $|z| < 1$ und $|z| < 2$ und ziehen die Resultate voneinander ab. Sei $f(z) := z^4 - 6z + 3$ und $g_1(z) := -6z$. Auf $|z| = 1$ dominiert dann g f, also

$$|f(z) - g_1(z)| = |z^4 + 3| \leq 4 < 6 = |g_1(z)|.$$

Damit muss f in $\mathbb{D}$ genau eine Nullstelle haben.

Auf $|z| = 2$ benötigen wir eine andere Funktion, hier tut's $g_2(z) := z^4$, denn

$$|f(z) - g_2(z)| = | - 6z + 3| \leq 9 < 16 = |g_2(z)|.$$

g_2 besitzt eine vierfache Nullstelle in diesem Gebiet, also hat f auch 4 Nullstellen mit Vielfachheiten. Eine davon muss jedoch aus obigem Argument im Gebiet $|z| < 1$ liegen. Ausserdem hat f auf $|z| = 1$ keine Nullstelle, denn $6z = z^4 + 3$ ist aufgrund der Beträge dort nicht möglich. Damit hat f im Ringgebiet $1 < |z| < 2$ genau 3 Nullstellen mit Vielfachheiten gezählt.

8. Das Polynom $f(z) = z^4 + 8z^3 + 3z^2 + 8z + 3$ hat keine Polstellen. Wir betrachten den Weg γ_r, der den rechten Halbkreis mit Radius r umschliesst, also die Verkettung des Weges $\gamma_{1,r} : [-r, r] \to \mathbb{C}, t \mapsto -it$ mit dem Weg $\gamma_{2,r} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$. Da f ein Polynom vierten Grades ist und somit höchstens 4 Nullstellen hat, umschliesst γ_r für ein hinreichend grosses r alle gesuchten Nullstellen[1].

Nach dem Prinzip des Arguments (Satz 4.64) gilt nun, da f keine Polstelle besitzt,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \sum_j w(\gamma_r, a_j) m_j.$$

Hierbei bezeichnet m_j die Multiplizität der Nullstelle a_j. Weiterhin ist offenbar $w(\gamma_r, a_j) = 1$.

[1] Mit dem Satz von Rouché kann man zeigen, dass $r > 9$ reicht.

Nach Lemma 4.65 gilt weiter

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = w(f\circ\gamma_r, 0).$$

Wir erhalten somit die Gleichung

$$w(f\circ\gamma_r, 0) = \sum_j m_j$$

und müssen also nur noch die Umlaufzahl von $f\circ\gamma_r$ um 0 bestimmen. Wir tun dies, indem wir verfolgen, wo der Weg jeweils die reelle oder die imaginäre Achse überquert.

Es gilt

$$f\circ\gamma_{1,r}(t) = f(-it) = (t^4 - 3t^2 + 3) + 8it(t^2-1), \quad |t| \leq r.$$

Der Realteil dieses Ausdrucks ist stets positiv, der Imaginärteil hat einfache Nullstellen in $-1, 0$ und 1. Am Startpunkt $t = -r$ befinden wir uns also im vierten Quadranten und bewegen und bis $t = r$ in den ersten, ohne 0 umlaufen zu haben.

Für den Weg $f\circ\gamma_{2,r}$ erhalten wir ein Polynom in re^{it}:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} f(re^{it}) &= r^4\cos(4t) + 8r^3\cos(3t) + 3r^2\sin(2t) + 8r\cos(t) + 3,\\ \operatorname{Im} f(re^{it}) &= r^4\sin(4t) + 8r^3\sin(3t) + 3r^2\sin(2t) + 8r\sin(t).\end{aligned}$$

Der Reilteil kann mit der Formel $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ als ein Polynom in $\cos(t)$ aufgefasst werden. Das Polynom hat den Grad 4 und hat somit höchstens so viele Nullstellen.

Für hinreichend grosse r dominiert nun jeweils der Term mit $\cos(4t)$ beziehungsweise $\sin(4t)$ und bestimmt damit das Vorzeichen. Sollten wir gerade eine Nullstelle dieser Funktionen treffen, bestimmt der Term mit der zweithöchsten Frequenz das Vorzeichen Wir wählen uns 9 Stützpunkte und berechnen die Vorzeichen:

t	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{Re} f(re^{it})$	>0	<0	<0	>0	>0	>0	<0	<0	>0
$\operatorname{Im} f(re^{it})$	>0	>0	<0	<0	0	>0	>0	<0	<0

Wir sehen, dass die vier Nullstellen im Realteil auch tatsächlich auftauchen und dass diese auf verschiedenen Hälften der imagnären Achse geschehen. Dies bedeutet, dass $f\circ\gamma_{2,r}$ tatsächlich um den Nullpunkt herumläuft. Wir sehen, dass dies genau zwei Mal geschieht, und zwar im Gegenuhrzeigersinn. Damit hat f genau zwei Nullstellen in der rechten Halbebene.