Musterlösung zur Serie 14

1. Einen Diffeomorphismus $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ können wir ziemlich leicht konstruieren: Wir bilden $\mathbb{D}$ biholomorph auf die rechte Halbebene ab $\left(z \mapsto \frac{1+z}{1-z}\right)$ und strecken dann den Realteil mit der log-Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ aus, also $x+iy \mapsto (\log x)+iy$. Letztere Funktion ist diffeomorph, aber nicht holomorph.

   Für die zweite Frage nützen wir die Holomorphie aus: Wenn es so eine Funktion gäbe, wäre die Umkehrfunktion holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit beschränktem Bild $\mathbb{D}$, somit widersprüchlicherweise konstant nach dem Satz von Liouville.

2. (a) Wenn $f = \frac{p}{q}$ rational ist, so hat f im Fall $\deg p > \deg q$ einen Pol und andernfalls eine hebbare Singularität, die im Fall $\deg q < \deg p$ sogar 0 ist. Somit hat f keine wesentliche Singularität in ∞.

   Falls anders herum f keine wesentliche Singularität in ∞ hat, so lässt sich $f(\infty)$ als Element von $\overline{\mathbb{C}}$ definieren. Dann ist f als Funktion von $\overline{\mathbb{C}}$ auf sich selbst holomorph (vgl. Aufgabe 5 der Serie 11) und somit nach Teil (b) der erwähnten Aufgabe rational.

   (b) i. Ausserhalb von 0 ist f_1 wohldefiniert und hat unendlich viele Nullstellen, aber keine Pole. Da sich die Nullstellen in 0 häufen, aber die Funktion nicht konstant ist, kann die Funktion nach dem Identitätssatz nicht nach 0 fortgesetzt werden. Also ist f_1 meromorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, aber wegen der unendlichen Nullstellenmenge nicht rational.

   ii. f_2 kann als Abbildung nach $\overline{\mathbb{C}}$ mit diskret liegenden Polen $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ überall definiert werden und ist somit auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph. Allerdings ist f_2 ebenfalls nicht rational, da die Funktion unendlich viele Nullstellen hat.

   iii. Analog zu f_2 kann f_3 überall definiert werden, mit diskret liegenden Polen in $\{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Somit ist f_3 wie f_2 meromorph auf $\mathbb{C}$, aber nicht rational.

   iv. f_4 hat eine dreifache Polstelle in $z = \pm 2i$ und ist sonst holomorph, also meromorph und gar rational.

   v. Analog zu f_4 hat auch f_5 nur zwei isolierten Pole in $\pm\sqrt{2}i$ und ist somit meromorph und rational.

3. Der Kreissektor ABC wird durch die Funktion $g(z) := z^m$ biholomorph auf den oberen Halbkreis $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ abgebildet. Dieser Halbkreis wird dann durch $h(z) := \frac{1+z}{1-z}$ biholomorph auf den ersten Quadranten abgebildet, denn h ist eine Möbiustransformation und bildet das reelle Intervall $[-1, 1]$ auf die Halbachse $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und das Kreissegment $\{z \mid |z| = 1, \mathrm{Im} z \geq 0\}$ auf die Halbachse $i\mathbb{R}_{\geq 0}$ ab. Zu guter letzt wird der erste Quadrant durch quadrieren ($s(z) := z^2$) biholomorph auf $\mathbb{H}$ abgebildet. Es gilt also $f = s \circ h \circ g$, wobei jede Abbildung biholomorph ist. Damit ist auch f biholomorph.

4. (a) Da Ω nicht leer ist, gibt es einen Punkt $z \in \Omega$ und somit auch $\bar{z} \in \Omega$. Falls $z \notin \mathbb{R}$, so liegen z und $\bar{z}$ in verschiedenen Halbebenen, werden aber wegen dem einfachen Zusammenhang von Ω durch einen Weg γ verbunden. Die

Funktion $\mathrm{Im}\gamma(t)$ hat dann in 0 und in 1 verschiedene Vorzeichen also nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle t_0. Dann ist $g(t_0) =: z_0$ reell.

(b) Wir betrachten die Funktion $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, die auf Ω definiert ist. Aus der Aufgabe 3 der Serie 2 wissen wir, dass g holomorph ist. Wir schreiben nun $f = u + iv$. Dann gilt $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ und aus der Definition auch $g'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, -y) + i\frac{\partial u}{\partial y}(x, -y)$. Aus $f'(z_0) > 0$ und $z_0 =: x_0 + i \cdot 0 \in \mathbb{R}$ folgt nun $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, 0) = 0$ und somit $f'(z_0) = g'(z_0) > 0$. Ausserdem ist ebenfalls $g(z_0) = 0$. Zusammengefasst ist g wie auch f eine holomorphe Funktion $\Omega \to \mathbb{D}$ mit $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) > 0$. Nach dem Riemann'schen Abbildungssatz gibt es aber nur eine, d.h. $g = f$.

(c) Für ein $z \in \Omega$ ist wegen $z = z_0 + (z - z_0) \in \Omega$ auch $z_0 - (z - z_0) = 2z_0 - z \in \Omega$. Die Funktion $g(z) = -f(2z_0 - z)$ gilt dann $g(z_0) = -f(z_0) = 0$ und $g'(z_0) = f'(z_0) > 0$, also nach dem Abbildungssatz $f = g$. Damit erfüllt f die Funktionalgleichung $f(2z_0 - z) = -f(z)$, sie ist also "ungerade bezüglich z_0".

5. i. f_1 ist eine Möbiustransformation und damit biholomorph. Sie bildet 0 auf -1, $\pm i$ auf $\pm i$, 1 auf 0 und ∞ auf 1 ab. Damit ist das Bild gerade $\mathbb{D}$ und $z_1 = 1$. Es gilt $f_1'(z_1) = 1/2$.

ii. f_2 lässt sich mit $g(z) := z^2$ als Verknüpfung von g mit einer Möbiustransformation schreiben. Da $g(\Omega_2) = \mathbb{H}$ und g auf Ω_2 biholomorph ist, müssen wir nur noch die Möbiustransformation $\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{z-i}{z+i}$ betrachten: Sie bildet i auf 0, 0 auf $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, ± 1 auf $\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ und ∞ auf $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ab. Daraus folgt, dass die Möbiustransformation $\mathbb{H}$ biholomorph auf $\mathbb{D}$ abbildet. Somit ist f_2 auch biholomorph. Es gilt $z_2 = e^{\pi i/4}$ und $f_2'(z_2) = 1$.

iii. Die Funktion $e^{\pi z/2}$ bildet Ω_3 biholomorph auf Ω_1 ab. Da $f_1 : \Omega_1 \to \mathbb{D}$ biholomorph ist, ist f_3 somit auch biholomorph. Es gilt $z_3 = 0$ und $f_3'(z_3) = \pi/4$.

iv. Die Funktion $e^{\pi z}$ bildet Ω_4 biholomorph auf $\mathbb{H}$ ab. Diese Menge wiederum wird von der Möbiustransformation $\frac{z-i}{z+i}$ biholomorph auf $\mathbb{D}$ abgebildet. Es gilt $z_4 = i/2$ und $f_4'(z_4) = \pi/2$.

v. Nun zeigen wir, dass $f_5 = f_2 \circ (f_1|_{\Omega_2})^{-1}$ gilt. Dadurch ist f_5 als Verknüpfung biholomorpher Funktionen ebenfalls biholomorph.
Wir rechnen

$$\begin{aligned}
(f_2 \circ (f_1|_{\Omega_2})^{-1})(z) &= f_2\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{(1+z)^2 - i(1-z)^2}{(1+z)^2 + i(1-z)^2} \\
&= \frac{(z+i)^2 + 2 - i((z+i)^2 + 2)}{(z-i)^2 + 2 + i((z-i)^2 + 2)} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{(z+i)^2 + 2}{(z-i)^2 + 2} \\
&= \frac{1}{i} \cdot \frac{z^2 + 2iz + 1}{z^2 - 2iz + 1} = f_5(z).
\end{aligned}$$

Es gilt nun $z_5 = f_1(z_2) = \frac{e^{i\pi/4} - 1}{e^{i\pi/4} + 1} = i(\sqrt{2} - 1)$ und $f_5'(z_5) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

vi. Es ist noch zu zeigen, dass $f_5 = f_4 \circ (f_3|_{\Omega_4})^{-1}$ gilt. Wir haben $f_3^{-1}(z) =$

$\frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ und damit

$$\left(f_4 \circ (f_3|_{\Omega_4})^{-1}\right)(z) = \frac{e^{2\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} - i}{e^{2\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} + i} = \frac{(1+z)^2 - i(1-z)^2}{(1+z)^2 + i(1-z)^2}.$$

Auf diesen Ausdruck sind wir schon beim Berechnen von $(f_2 \circ (f_1|_{\Omega_2})^{-1})(z)$ gestossen, wir brechen diese Rechnung deshalb hier ab.