Serie 2

Abgabe: Bis Freitag, den 27. September, bis spätestens 15.00 Uhr in den Fächern im HG J 68. Die Online-Fragen können bis Montag, den 30. September, um 8 Uhr beantwortet werden.

1. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine reell-lineare Abbildung, die bezüglich der kanonischen reellen Koordinaten von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

definiert ist.

   (a) Zeigen Sie, dass sich $f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in der Form $f(z) = az + b\bar{z}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ schreiben lässt. Bestimmen Sie a und b in Abhängigkeit der reellen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

   (b) Unter welchen Bedingungen ist die Abbildung f $\mathbb{C}$-linear?

2. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen holomorph sind und bestimmen Sie ihre komplexen Ableitungen:

   (a) $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

   (b) $f(z) = e^z$,

   (c) $f(z) = \sin z$.

3. Sei $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $\tau(z) = \bar{z}$ definiert. Zeigen Sie:

   (a) τ ist nicht holomorph.

   (b) Für jedes offene $\Omega \subset \mathbb{C}$ und jede holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist $h := \tau \circ f \circ \tau : \{\bar{z} \mid z \in \Omega\} \to \mathbb{C}$ ebenfalls holomorph.

4. Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion. Wir definieren die *Wirtinger-Ableitung* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Zeigen Sie, dass f genau dann holomorph ist, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$.

5. Untersuchen Sie, in welchen Punkten der komplexen Ebene die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind und bestimmen Sie ggf. die zugehörigen komplexen Ableitungen. Es gelten dabei die üblichen Notationen $z =: x+iy, \mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}, \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ und $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

   (a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = x^5y^4 - ix^4y^5$,

   (b) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{ix+y}{x^2+y^2}$,

   (c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^y - ie^x$,

   (d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sin(|z|^2)$,

   (e) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \mathrm{Re}(z)$,

   (f) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^{22}|z|$,

   (g) $f : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

6. Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend sowie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie:

   (a) Ist $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$, so ist f konstant.

   (b) Liegen alle Werte von f auf dem Einheitskreis, so ist f konstant.

7. Untersuchen Sie die Funktion $f(z) = z^3$ mit Sage: Erzeugen Sie mit `Graphics()` eine Plot-Umgebung, in die Sie mit der Funktion `implicit_plot` die Niveaulinien $\{z \mid \mathrm{Re} f(z) = c\}$, $\{z \mid \mathrm{Im} f(z) = c\}$ und $\{z \mid |f(z)| = c\}$ für $c \in \{-3, -2.5, \dots, 2.5, 3\}$ zeichnen. Verwenden Sie die Parameter `color`, `linewidth` und `linestyle` der Funktion `implicit_plot`, um die verschiendenen Niveaulinien und die Veränderung in c visuell darzustellen.

8. Online-Fragen:

1. Sei $z = x + iy$ die komplexe Standardvariable auf $\mathbb{C}$. Für alle $a > 0$ gilt, dass die Funktion $f_a(z) = ax^3 + iy$ an einer Stelle $z_a \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

(a) Richtig.

(b) Nicht richtig.

2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Welche der folgenden Funktionen $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind holomorph?

(a) $g(z) = f(z)^2$

(b) $g(z) = f(z^2)$

(c) $g(z) = \overline{f(z)}$

(d) $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$

(e) $g(z) = f(\bar{z})$

3. Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erfülle $\frac{\partial}{\partial x} f(x + iy) = 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Was folgt daraus?

(a) $f(z) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(b) $f'(z) = 1$,$\forall z \in \mathbb{C}$.

(c) $\frac{\partial}{\partial y} f(x + iy) = 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{\partial}{\partial y} f(x + iy) = i$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$