Serie 3

Abgabe: Bis Freitag, den 4. Oktober, bis spätestens 15.00 Uhr in den Fächern im HG J 68. Die Online-Fragen können bis Montag, den 7. Oktober, um 8 Uhr beantwortet werden.

1. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $\zeta \in \mathbb{C}$. Wir identifizieren $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

   (a) Ist die Differenz $\arg(A\zeta) - \arg(\zeta)$ unabhängig von ζ, dann ist A komplex linear.

   (b) Ist der Quotient $\frac{|A\zeta|}{|\zeta|}$ unabhängig von $\zeta \neq 0$, dann ist A entweder komplex linear oder komplex anti-linear.

2. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass eine Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $f := u + iv$ holomorph ist.

   (b) Sei nun $\Omega := \mathbb{C}$ und $u(x, y) := ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. Finden Sie alle Tupel $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, so dass u harmonisch ist. Bestimmen Sie in diesen Fällen $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ so, dass $f := u + iv$ holomorph ist.

3. Sei $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$. Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit der Ebene $\{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Bestimmen Sie für jedes $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ ein $z =: x + iy \in \mathbb{C}$, so dass die Punkte $(0, 0, 1)$, (x_1, x_2, x_3) und $(x, y, 0)$ auf einer Gerade liegen.

   (b) Zeigen Sie, dass die Zuordnung $(x_1, x_2, x_3) \mapsto z$ einen wohldefinierten Diffeomorphismus $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{C}$ bestimmt und finden Sie die Umkehrabbildung.

4. Sei $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Riemannsche Zahlenkugel und $z_0, z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$.

   (a) Finden Sie eine Möbiustransformation $\varphi := \varphi_{z_0,z_1,z_2} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, so dass

   $$\varphi(z_0) = 0, \qquad \varphi(z_1) = 1, \qquad \varphi(z_2) = \infty.$$

   (b) Für ein weiteres $z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ definieren wir das Doppelverhältnis

   $$w(z_0, z_1, z_2, z_3) := \varphi_{z_0,z_1,z_2}(z_3).$$

   Zeigen Sie, dass für jede weitere Möbiustransformation $\psi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ gilt:

   $$w(\psi(z_0), \psi(z_1), \psi(z_2), \psi(z_3)) = w(z_0, z_1, z_2, z_3).$$

5. (a) Zeigen Sie, dass für eine Möbiustransformation $\varphi(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ das Urbild der reellen Gerade genau dann auch eine Gerade ist, wenn $a\bar{c} = \bar{a}c$. Zeigen Sie desweiteren, dass das Urbild der reellen Gerade andernfalls ein Kreis ist.
   (b) Folgern Sie, dass die komplexen Zahlen z_0, z_1, z_2, z_3 genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden liegen, wenn ihr Doppelverhältnis $w(z_0, z_1, z_2, z_3)$ reell ist.
   (c) Folgern Sie weiter, dass jede Möbiustransformation jede Gerade und jeden Kreis wiederum auf eine Gerade oder einen Kreis abbildet.

6. Experimentieren Sie mit dem Interact-Script `s03.sage` von der Vorlesungsseite in einer Notebook-Umgebung von `Sage`. Veranschaulichen Sie sich die eben bewiesenen Eigenschaften der Möbiustransformation.

7. Online-Fragen:

1. Welche der folgenden Abbildungen sind Möbiustransformationen, die 0 auf 1, i auf ∞ und ∞ auf -1 abbilden?

(a) $z \mapsto \frac{i+z}{i-z}$

(b) $z \mapsto 1 + \frac{2z}{i-z}$

(c) $z \mapsto \frac{i}{i-z} - \frac{z}{z-1}$

(d) $z \mapsto \frac{z+1}{iz+1}$

2. Sei $z_0 = 3 + 4i$. Das Bild von $S = \{z : |z - z_0| = 6\}$ unter der Abbildung $f(z) = \frac{1}{z}$ ist ...

(a) ... ein Kreis.

(b) ... eine Gerade.