Serie 4

Abgabe: Bis Freitag, den 11. Oktober, bis spätestens 15.00 Uhr in den Fächern im HG J 68. Die Online-Fragen können bis Montag, den 14. Oktober, um 8 Uhr beantwortet werden.

1. Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}^*$, in denen $f(z) := z\bar{z} + z/\bar{z}$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt.

2. Bestimmen Sie die grösste offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$, so dass $f(z) := \log(z^5+1)$ analytisch ist und berechnen Sie f'. Hierbei bezeichne log den Hauptzweig des Logarithmus.

3. Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein harmonisches Polynom mit reellen Koeffizienten.

   (a) Sei v die zu u konjugierte Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) := f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$ ein Polynom in z ist.

   (b) Zeigen Sie, dass
   $$f(z) := 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0,0)$$
   eine analytische Funktion mit Realteil u definiert.

4. (a) Sei $\psi : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch $(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) =: (x,y)$ definiert. Weiter sei $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ offen und $u : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Wir definieren $\Omega := \psi^{-1}(D)$ und $U : \Omega \to \mathbb{R}$ als $U(r,\varphi) := u(\psi(r,\varphi))$. Beweisen Sie, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten folgende Form hat:
   $$(\Delta u)(x,y) = \left(U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi}\right)(r,\varphi).$$

   (b) Bestimmen Sie alle harmonischen Funktionen $u : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$, die nur von $r := |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ abhängig sind.

5. Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \in (-\pi/2, \pi/2)\}$.

   (a) Bestimmen Sie das Bild $f(D)$ der Funktion $f(z) := \sin z$.

   (b) Bestimmen Sie das Bild $f(D)$ der Funktion $f(z) := \tan z$ sowie eine Umkehrabbildung g, deren Definition ohne trigonometrische Terme auskommt.

6. Erstellen Sie mit `Sage` 3D-Plots des Betrags und des Arguments der Funktion $\sin(z)$ in einer geeigneten Umgebung von 0.

7. Online-Fragen:

1. Welche der folgenden holomorphen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ haben eine holomorphe inverse Funktion $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$?

(a) $f(z) = z^4$ auf $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0,\ \Im(z) > 0\}$

(b) $f(z) = z + z^3$ auf $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

(c) $f(z) = e^z$ auf $\Omega = \mathbb{C}$.

(d) $f(z) = z + z^{-1}$ auf $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

(e) $f(z) = z^3$ auf $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \longrightarrow V = f(U) \subset \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Es sei angenommen, dass $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann ist f eine biholomorphe Abbildung von U nach V, ...

(a) ... wenn f injektiv ist.

(b) ... wenn f surjektiv ist.

(c) ... wenn zusätzlich $f''(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ gilt.

3. Welches ist der Radius der grössten offenen Kreisscheibe um 0, auf der f mit $f(z) = z^2 + z$ injektiv ist?

(a) 0

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 1

(d) 2

(e) π