Serie 5

Abgabe: Bis Freitag, den 18. Oktober, bis spätestens 15.00 Uhr in den Fächern im HG J 68. Die Online-Fragen können bis Montag, den 21. Oktober, um 8 Uhr beantwortet werden.

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion und $\gamma : [a, b] \to \Omega$ eine glatte, geschlossene Kurve.

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$\mathrm{Re} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma \mathrm{Re}(f(z)\mathrm{d}z),$$

   (b) Sei nun f zusätzlich holomorph. Zeigen Sie, dass $\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z)\mathrm{d}z$ rein imaginär ist.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass $|f(z) - 1| < 1$ für alle $z \in \Omega$, und $\gamma : [a, b] \to \Omega$ eine glatte, geschlossene Kurve. Zeigen Sie, dass
   $$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 0.$$

3. Sei P ein Polynom mit komplexen Koeffizienten und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ der Kreis $\gamma(t) := a + Re^{2\pi i t}$ mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$. Wir definieren $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}\bar{z} := \int_0^1 f(\gamma(t))\overline{\dot{\gamma}(t)}\mathrm{d}t$. Zeigen Sie, dass
   $$\int_\gamma P(z)\mathrm{d}\bar{z} = -2\pi i R^2 P'(a).$$

4. Es bezeichne $\int_{|z|=R} f(z)\mathrm{d}z$ das Wegintegral entlang des Weges $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) := Re^{2\pi i t}$. Berechnen Sie die Integrale
   $$\text{(a)} \quad \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z, \qquad \text{(b)} \quad \int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z.$$

5. Berechnen Sie für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ mit der gleichen Konvention wie in Aufgabe 4 die Integrale
   $$\text{(a)} \quad \int_{|z|=1} e^z z^{-n}\mathrm{d}z, \qquad \text{(b)} \quad \int_{|z|=2} z^n(1-z)^m\mathrm{d}z.$$

6. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a, b] \to \Omega$ eine glatte Kurve mit Bild Γ. Wir definieren die Weglänge $L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\mathrm{d}t$ sowie $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}|z| := \int_a^b f(\gamma(t))|\dot{\gamma}(t)|\mathrm{d}t$.

   (a) Zeigen Sie, dass folgende Ungleichung aus der reellen Analysis auch für komplexwertige Funktionen g gilt:
   $$\left| \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |g(t)|\mathrm{d}t.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jede stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt

$$\left| \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z \right| \leq \int_\gamma |f(z)| \mathrm{d}|z| \leq L(\gamma) \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{|z|=1} |z-1| \mathrm{d}|z|.$$

7. Der Cauchy-Integralsatz sagt uns, dass für holomorphe Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ die kreisförmigen Integrale $\int_{|z-a|=R} f(z) \mathrm{d}z$ verschwinden, sofern die Kreisscheibe mit Radius R um den Punkt a ganz in Ω liegt. Überprüfen Sie diese Aussage empirisch mit `Sage`, indem Sie für die Funktion $f(z) := e^z$ und den Einheitskreis $|z| = 1$ die Riemannsummen

$$\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} f(\gamma(t_{k,n})) \dot{\gamma}(t_{k,n})$$

für geeignete Stützpunke $t_{k,n} \in [0, 1)$ und ein wachsendes n berechnen. Wo kann der Wert der Riemannsumme liegen, wenn Sie die Stützpunkte $t_{k,n}$ randomisieren?

8. Online-Fragen:

1. Welche der beiden folgenden Aussagen gilt für jede holomorphe Funktion f und jeden glatten Weg γ?

(a) $\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z \right) = \int_\gamma \mathrm{Re}(f(z)) \mathrm{d}z.$

(b) Aus $f \neq 0$ auf γ folgt $\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z \neq 0.$

(c) Keine der Aussagen ist korrekt.

(d) Beide sind korrekt.

2. Sei

$$I(r) := \int_{|z|=r} \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2} \mathrm{d}z.$$

Welche der folgenden Gleichungen sind korrekt?

(a) $\lim_{r \to \infty} I(r) = 0$

(b) $I(2) = -2\pi^2 i$

(c) $I(3) = -3\pi^2 i$

(d) $I'(r) = 0$ für alle $0 < r \neq 1$

(e) $I(\frac{1}{2}) = 0$