Serie 6

Abgabe: Bis Freitag, den 25. Oktober, bis spätestens 15.00 Uhr in den Fächern im HG J 68. Die Online-Fragen können bis Montag, den 28. Oktober, um 8 Uhr beantwortet werden.

1. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so dass für ein $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und alle hinreichend grossen z die Ungleichung $|f(z)| < |z|^n$ gilt. Zeigen Sie, dass f ein Polynom ist.

2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $M, R > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq R$ die Ungleichung $|f(z)| \leq M$ gilt. Finden Sie eine obere Schranke für $|f^{(n)}(z)|$ in $|z| \leq \rho < R$ in Abhängigkeit von n, M und ρ.

3. Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so dass
$$\forall z \in \mathbb{D} : |f(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|}.$$
Zeigen Sie die Ungleichung
$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}.$$

4. Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass die Ungleichung $|f^{(n)}(0)| > n! n^n$ nur für endlich viele n gelten kann.

5. Sei $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so dass $f(z + \tau) = f(z + 1) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

6. Zeigen Sie, dass je zwei glatte Schleifen $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ mit der gleichen Windungszahl $w(\gamma_0, 0) = w(\gamma_1, 0)$ um 0 homotop sind.

7.* Wir wollen den Jordan'schen Kurvensatz zeigen: Jede glatte Einbettung $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ (d.h. γ ist injektiv) mit Bild Γ unterteilt die Menge $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten $\Omega_0 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid w(\gamma, z) = 0\}$ und $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid |w(\gamma, z)| = 1\}$.

   Sei zu diesem Zweck $\varepsilon > 0$, ein ε-Band um γ gegeben durch $U_\varepsilon := \{\gamma(t) + i\lambda\dot{\gamma}(t) \mid t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ und $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to U_\varepsilon$ gegeben durch $\varphi(t, \lambda) := \gamma(t) + i\lambda\dot{\gamma}(t)$.

   (a) Zeigen Sie, dass für hinreichend kleine ε die Menge U_ε offen und φ ein Diffeomorphismus ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die zwei Mengen $U_\varepsilon^{\pm} := \{\gamma(t) \pm i\lambda\dot{\gamma}(t) \mid t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \lambda \in (0, \varepsilon)\}$ zusammenhängend sind.

   (c) Zeigen Sie weiter, dass jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ über eine glatte Kurve $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{C} \setminus \Gamma$ mit einem Punkt $z_0 \in U_\varepsilon \setminus \Gamma$ verbunden werden kann.

   (d) Folgern Sie daraus den Jordan'schen Kurvensatz.

8. Machen Sie sich mit Windungszahlen vertraut, indem Sie mit dem Interact-Script `http://wiki.sagemath.org/interact/topology` experimentieren. Was ist die Umlaufzahl um 0, wenn wir den Kreis $|z| = 1$ nach $\mathbb{C}^*$ mit den Funktionen $\sin z$, e^{2z} oder e^{z^2} abbilden?

9. Online-Fragen:

1. Sei f holomorph im Kreisring $\{z : 1 < |z| < 4\}$. Dann gilt

$$\int_{|z|=2} f(z)dz = \int_{|z|=3} f(z)dz...$$

(a) ... immer.

(b) ... im allgemeinen nicht.

(c) ... nur wenn sich f holomorph auf den Rand fortsetzen lässt.

2. Sei A die Menge aller holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft: Es gibt ein $M > 0$, sodass $|f(z)| \leq |z|^{3/2}$, für $|z| \geq M$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Die Menge A besteht genau aus den Funktionen der Form $z \mapsto az + b$.

(b) Die Menge A besteht aus den Funktionen der Form $z \mapsto z^{3/2}g(z)$, wobei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt ist.

(c) Es gilt $f \in A \Rightarrow f''(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(d) Es gilt $f \in A \Rightarrow f$ ist konstant.

(e) Die Funktion $z \mapsto z \sin(z)$ ist in A.