Serie 7

Abgabe: Bis Freitag, den 1. November, bis spätestens 15.00 Uhr in den Fächern im HG J 68. Die Online-Fragen können bis Montag, den 4. November, um 8 Uhr beantwortet werden.

1. (a) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z}$$

im Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

im Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

2. Geben Sie je ein Beispiel für eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenradius, die

(a) auf dem ganzen Rand des Konvergenzkreises konvergiert,

(b) auf dem ganzen Rand des Konvergenzkreises divergiert,

(c) auf dem Rand des Konvergenzkreises mindestens 2 Konvergenzpunkte und mindestens 2 Divergenzpunkte besitzt.

3. Finden Sie eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 1$ sowie $f'(z) = zf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

4. Zeigen Sie, dass die Taylorreihe der Funktion $1/\cos z$ die Form

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n \geq 0} \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

hat, bestimmen Sie den Konvergenzradius und beweisen Sie, dass die Koeffizienten E_{2n} ganze Zahlen sind.

5. Die Cauchy-Integralformel sagt uns, dass

$$\exp z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\exp \zeta}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

für $|z| < 1$ gilt.

Diese Formel gilt jedoch nicht nur für komplexe Zahlen: Zeigen Sie numerisch mit `Sage`, dass die Gleichung

$$\exp A = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\exp \zeta}{\zeta - A} \mathrm{d}\zeta$$

auch für reelle, symmetrische Matrizen A gilt, deren Eigenwerte $|\lambda_i| < 1$ erfüllen, wenn wir $\exp \zeta$ und ζ als skalare Vielfache der Einheitsmatrix und die Division als Multiplikation mit der Inversen von rechts auffassen.

6. Online-Fragen:

1. Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe Konvergenzradius R. Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$ ist ...

(a) R

(b) R^2

(c) $\sqrt{R}$

(d) $2R$

(e) $\frac{R}{2}$

(f) ∞

(g) Es ist keine allgemeine Aussage möglich.

2. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe

$$\frac{2z}{\exp(z^2)+1} = z - \frac{z^3}{2} + \frac{z^7}{24} + \cdots$$

(a) $\sqrt{\pi}$

(b) ∞

(c) 0

(d) 1

(e) $\sqrt{2\pi}$

(f) π^2

3. Die Potenzreihe der Exponentialfunktion um einen Punkt a ...

(a) ... gibt es nicht.

(b) ... ist $\exp(a)\exp(z)$.

(c) ... ist $\exp(a)\exp(a-z)$.

(d) ... ist $\exp(a)\exp(z-a)$.