Serie 8

Abgabe: Bis Freitag, den 8. November, bis spätestens 15.00 Uhr in den Fächern im HG J 68. Die Online-Fragen können bis Montag, den 11. November, um 8 Uhr beantwortet werden.

1. Sei $B_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = z^3 + z$ definiert. Welches ist der grösste Wert von r, so dass $f|_{B_r}$ injektiv ist? Beantworten Sie die Frage auch für $g(z) := e^z$.

2. Aus Satz 3.61 wissen wir, dass sich holomorphe Funktionen, deren ersten $n-1$ Ableitungen in einem Punkt z_0 verschwinden, lokal wie n-te Potenzen von weiteren holomorphen Funktionen verhalten, also
$$f(z) - f(z_0) = \varphi(z)^n$$
auf einer genügend kleinen Umgebung U um z_0.

   Bestimmen Sie n und φ explizit für den Fall $f(z) = \cos z$ und $z_0 = 0$.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, die 0 enthält, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f'(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ um 0 sowie eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ gibt, so dass für jedes $z \in U$ gilt:
$$z^n \in \Omega \Rightarrow f(z^n) = f(0) + g(z)^n.$$

4. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe, nicht-konstante Funktion. Zeigen Sie, dass das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

5. (a) Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $|f(z)| < |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $f = c \cdot g$ gilt.

   (b) Finden Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die $|f'(z)| < |f(z)|$ auf ganz $\mathbb{C}$ erfüllen.

6. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine C^1-Abbildung mit Bild Γ. Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ auf einer offenen, zusammenhängenden Menge Ω mit Bild $f(\Omega) \subset \Gamma$ konstant sein muss.

7. Online-Fragen:

1. Eine auf einer offenen Teilmenge U holomorphe Funktion f, deren Bild auf einer Kreislinie liegt, ...

(a) ... gibt es nicht.

(b) ... ist konstant, falls U zusammenhängend ist.

(c) ... ist immer konstant.

2. Auf welches der folgenden Gebiete lässt sich das Gebiet $G = \mathbb{C} \backslash \{iy : y \leq 0\}$ *nicht* biholomorph abbilden?

(a) Die Einheitskreisscheibe.

(b) $\{w : |w| > 1\}$.

(c) $\{w : |Re(w)| < 1\}$.

3. Sei $D = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ die rechte Halbebene. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle holomorphen Funktionenpaare $f, g : D \to \mathbb{C}$?

(a) $fg = 0 \Rightarrow f = 0$ oder $g = 0$.

(b) $f^{(n)}(1) = (-1)^n g^{(n)}(1)$ für alle $n = 0, 1, 2, \cdots \Rightarrow f$ und g sind konstant.

(c) $f(1/n) = g(1/n)$ für alle $n = 1, 2, \cdots \Rightarrow f = g$

(d) $f(1 - 1/n) = g(1 + 1/n)$ für alle $n = 2, 3 \cdots \Rightarrow f$ ist die Einschränkung einer ganzen Funktion auf D.

(e) $|f(x)| < 1$ für alle reelle $x > 0 \Rightarrow f$ ist konstant.