Serie 9

Abgabe: Bis Freitag, den 15. November, bis spätestens 15.00 Uhr in den Fächern im HG J 68. Die Online-Fragen können bis Montag, den 18. November, um 8 Uhr beantwortet werden.

1. Sei $\Omega \in \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und seien $f, g : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Wir sagen, f habe die algebraische Ordnung k an der Stelle a, falls der Grenzwert
$$\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z)$$
existiert und nicht verschwindet.
   (a) Die algebraische Ordnung von f in a sei k, diejenige von g in a sei l. Bestimmen Sie die möglichen algebraischen Ordnungen der Funktionen $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ und $f + g$.
   (b) Was lässt sich über die Singularität a der Funktionen $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ und $f + g$ aussagen, wenn f oder g oder gar beide in a eine wesentliche Singularität haben?

2. Sei a eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion f. Zeigen Sie, dass die Funktion e^f keinen Pol in a haben kann.

3. Wie üblich sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Zeigen Sie, dass es für jeden holomorphen Diffeomorphismus $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ein $z_0 \in \mathbb{D}$ und ein $\theta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt:
$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}.$$

4. Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene. Zeigen Sie, dass für jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ die beiden Ungleichungen
$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|f(z) - \overline{f(z_0)}|} \leq \frac{|z - z_0|}{|z - \overline{z_0}|} \qquad \text{und} \qquad \frac{|f'(z)|}{\mathrm{Im} f(z)} \leq \frac{1}{\mathrm{Im} z}$$
gelten. Zeigen Sie weiter, dass in den obigen Ungleichungen genau dann Gleichheit eintritt, wenn f ein holomorpher Diffeomorphismus ist.

5. Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ ein holomorpher Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen a, b, c, d mit $ad \neq bc$ gibt, so dass für alle $z \in \mathbb{H}$ gilt:
$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

6.* Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{D}$ eine stückweise differenzierbare Kurve. Wir definieren die *hyperbolische Länge* von γ durch
$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_\gamma \frac{\mathrm{d}|z|}{1 - |z|^2}.$$

Zeigen Sie, dass für holomorphe Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$

$$\mathcal{L}(f \circ \gamma) \leq \mathcal{L}(\gamma)$$

gilt. Zeigen sie weiter, dass für diffeomorphe f die Gleichheit eintritt.

7. Online-Fragen:

1. Klassifizieren Sie die Singularität der Funktion f mit $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z^2+1}\right)$ bei $z_0 = i$.

(a) Keine Singularität.

(b) Eine hebbare Singularität.

(c) Ein Pol der Ordnung 1.

(d) Ein Pol der Ordnung 2.

(e) Eine wesentliche Singularität.

2. Die Pole der Funktion f mit $\coth(z)$ liegen bei ...

(a) πin für alle ganzen Zahlen n.

(b) in für alle ganzen Zahlen n.

(c) πn für alle ganzen Zahlen n.

(d) $2\pi in$ für alle ganzen Zahlen n.

(e) 0 ausschliesslich.

3. Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$, und $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph, mit einem Pol in a der Polordnung $n \geq 1$. Welche Aussagen gelten dann allgemein?

(a) a ist eine hebbare Singularität von g mit $g(z) = \frac{1}{f(z)}$.

(b) a ist ein Pol von g mit $g(z) = \exp(f(z))$.

(c) a ist eine wesentliche Singularität von g mit $g(z) = \exp(f(z))$.

(d) a ist eine hebbare Singularität von g mit $g(z) = \exp(-f(z))$.

(e) a ist eine hebbare Singulatität von g mit $g(z) = \sin^n(z - a)f(z)$.