D-MATH, D-PHYS | Funktionentheorie | HS 2013
Prof. J. Teichmann

Serie 10

Abgabe: Bis Freitag, den 22. November, bis spätestens 15.00 Uhr in den Fächern im HG J 68. Die Online-Fragen können bis Montag, den 25. November, um 8 Uhr beantwortet werden.

1. Bestimmen Sie von den folgenden Mengen Ω, ob sie einfach zusammenhängend sind.
   (a) $\Omega := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$,
   (b) $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z \neq \frac{2\pi i k}{3} \text{ falls } |z| \geq 1 \text{ für } k \in \mathbb{Z}\}$,
   (c) $\Omega := \mathbb{C} \setminus A$, wobei $A := \{iy \mid y \in [-1,1]\} \cup \{x + i \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mid x > 0\}$.

2. Sei $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ eine glatte Einbettung mit Bild Γ. Zeigen Sie, dass $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \mid w(\gamma, z) \neq 0\}$ einfach zusammenhängend ist.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, so dass $\mathbb{C} \setminus \Omega$ kompakt ist. Sei weiter $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.
   (a) Wir sagen, f habe eine hebbare Singularität in ∞, wenn $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{z} f(z) = 0$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Grenzwert $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ existiert.
   (b) Wir sagen, f habe einen Pol in ∞, wenn $\lim\limits_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$. Sei nun $\Omega = \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass ∞ genau dann ein Pol von f ist, wenn f ein nichtkonstantes Polynom ist.

4. (a) Sei f eine ganze, injektive Funktion. Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{C}$ gibt, so dass sich f als $f(z) = az + b$ schreiben lässt.
   (b) Bestimmen Sie alle ganzen, holomorphen Funktionen, die selbstinvers sind, d.h. $f(f(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie, dass jeder Zyklus $\gamma = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} m_i \gamma_i$ in Ω äquivalent zu einer formalen Summe endlich vieler glatter Schleifen ist.

6.* Konstruieren Sie eine glatte Schleife $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit Bild Γ, sodass es für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ einen Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ gibt, für den $w(\gamma, z) = n$ gilt.

7. Die n-ten Einheitswurzeln, also die komplexen Lösungen von $z^n = 1$, liegen auf dem Rand der Poincaré -Scheibe. Schreiben Sie ein `Sage`-Programm, welches die Einheitswurzeln auf die hyperbolische Halbebene überträgt und zeichnen Sie mit `hyperbolic_arc(a,b)` aus dem Paket `sage.plot.hyperbolic_arc` alle Geodäten zwischen diesen Einheitswurzeln.

8. Online-Fragen:

1. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Es sei $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so dass $\{z \in U : f(z) = 0\}$ eine unendliche Menge ist. Ist dann $f(z)$ notwendigerweise konstant?

(a) Ja.

(b) Nein.

2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ eine einfach-geschlossene Kurve, deren Graph $\gamma([0,1])$ ein beschränktes Teilgebiet $V \subset U$ umrandet. Es sei $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von holomorphen Funktionen auf U derart, dass $f_n(z)$ auf $\gamma([0,1])$ gleichmässig konvergiert.

(a) Dann konvergiert $f_n(z)$ kompakt auf V.

(b) Dann konvergiert $f_n(z)$ kompakt auf V, aber im allgemeinen nicht gleichmässig auf V.

(c) Dann konvergiert $f_n(z)$ gleichmässig auf V.

3. Es sei $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, und sei $z = re^{i\phi}, \phi \in (-\pi, \pi)$, die Polarkoordinatendarstellung von z. Ist $f(z) = \phi - r^{1/4}e^{i(\phi+2\pi)/4} - i \ln r$ eine holomorphe Funktion auf U?

(a) Ja.

(b) Stimmt nicht.