Serie 11

Abgabe: Bis *Montag, den 2. Dezember, bis spätestens 10.15 Uhr* in den Fächern im HG J 68. Die Online-Fragen können bis Montag, den 2. Dezember, um 8 Uhr beantwortet werden.

1. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und einfach zusammenhängend, so dass $0 \notin \Omega$ und $\Omega \cap (0, \infty)$ ein nichtleeres Intervall ist. Sei ausserdem $\alpha \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es auf Ω holomorphe Funktionen

$$f(z) := \log z, \qquad g(z) := z^\alpha, \qquad h(z) := z^z$$

gibt, die auf $\Omega \cap (0, \infty)$ die gewohnte Form haben.

(b) Wie können diese drei Funktionen definiert werden, wenn $\Omega \cap (0, \infty)$ die leere Menge ist oder mehrere Intervalle enthält?

(c) Seien $A, B \subset \overline{\mathbb{C}}$ abgeschlossene, zusammenhängende, disjunkte Mengen mit $0 \in A$ und $\infty \in B$. Dann ist die über $A \cup B =: \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ definierte Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend. Zeigen Sie, dass auf Ω keine Logarithmusfunktion existiert, d.h. es existiert keine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, die die Gleichung $e^{f(z)} = z$ auf ganz Ω erfüllt.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf Ω keine Nullstelle hat und für die ein $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ existiert, so dass für alle Zykel $\gamma \in Z(\Omega)$ gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta \in n\mathbb{Z}.$$

(a) Sei $z_0 \in \Omega$ fest und $w_0 \in \mathbb{C}$ so dass $f(z_0) = w_0^n$. Für $z \in \Omega$ sei weiter $\gamma_z : [0, 1] \to \Omega$ ein Weg von z_0 nach z. Wir definieren

$$g(\gamma_z) := w_0 \exp\left(\frac{1}{n} \int_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta\right).$$

Zeigen Sie, dass g nicht von der Wahl des Weges γ_z, sondern nur von z selbst abhängt.

(b) Wir können g also als komplexe Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ auffassen. Zeigen Sie, dass g holomorph ist.

(c) Zeigen Sie, dass g eine n-te Wurzel von f ist, d.h. $f(z) = g^n(z)$ für alle $z \in \Omega$.

3. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ offen und zusammenhängend, so dass die Punkte ± 1 in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Omega$ enthalten sind. Zeigen Sie, dass die Funktion $1 - z^2$ auf Ω eine holomorphe zweite Wurzel hat.

(b) Finden Sie eine lokale Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.

(c) Zerlegen Sie $\mathbb{C}$ in offene, zusammenhängende Mengen $\Omega_n, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, so dass $\bigcup_{n>0} \Omega_n$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt und $\sin(w)$ jedes Ω_n biholomorph entweder auf die obere oder die untere Halbebene abbildet.

(d) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \mathrm{d}z$$

für den Spezialfall $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ und $\gamma(t) = re^{2\pi i t}$ für $r > 1$.

(e) Bestimmen Sie alle Werte, die

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \mathrm{d}z$$

für Ω wie in (a) und $\gamma \in Z(\Omega)$ annehmen kann.

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und seien $A_\infty, A_1, A_2, \ldots, A_n$ die endlich vielen Zusammenhangskomponenten von $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, wobei $\infty \in A_\infty$ ist. Seien $a_i \in A_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir definieren $\Phi : Z(\Omega) \to \mathbb{Z}^n$ durch

$$\Phi(\gamma) := (w(\gamma, a_1), \ldots, w(\gamma, a_n)).$$

Zeigen Sie:

(a) Φ ist unabhängig von der Wahl der a_i.

(b) Φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(c) $\ker(\Phi) = B(\Omega)$.

(d) Φ ist surjektiv.

Schliessen Sie, dass die induzierte Abbildung $\varphi : H(\Omega) \to \mathbb{Z}^n$ ein Gruppenisomorphismus ist.

5. Sei $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ stetig. Wir nennen f holomorph, wenn die Funktionen

$$\begin{aligned}
&f_1 : \Omega_1 \to \mathbb{C}, \quad f_1(z) = f(z), && \Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \neq \infty\},\\
&f_2 : \Omega_2 \to \mathbb{C}, \quad f_2(z) = 1/f(z), && \Omega_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \neq 0\},\\
&f_3 : \Omega_3 \to \mathbb{C}, \quad f_3(z) = f(1/z), && \Omega_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid f(1/z) \neq \infty\},\\
&f_4 : \Omega_4 \to \mathbb{C}, \quad f_4(z) = 1/f(1/z), && \Omega_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid f(1/z) \neq 0\}.
\end{aligned}$$

alle holomorph sind. Desweiteren heisst f biholomorph, wenn f bijektiv ist und die beiden Funktionen f und f^{-1} holomorph sind. Zeigen Sie:

(a) Für nicht-konstante holomorphe Funktionen $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ sind die Mengen $\mathbb{C} \setminus \Omega_i$ alle endlich.

(b) Jede holomorphe Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist rational.

(c) Jede biholomorphe Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist eine Möbiustransformation.

6. Online-Fragen:

1. Sei $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig der Wurzelfunktion (also $\mathbb{C}_- = \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ und $\sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$, für $r > 0, -\pi < \varphi < \pi$). Welche Aussagen sind richtig?

(a) $\sqrt{z^2} = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, sodass $z^2 \in \mathbb{C}_-$

(b) $\sqrt{i} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

(c) $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

(d) $\sqrt{}$ ist holomorph.

(e) $\sqrt{-z} = i\sqrt{z}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

2. Sei $\ln : \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ der Hauptzweig des Logarithmus (d.h. $\ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$, $-\pi < \varphi < \pi$) und γ der Halbkreis $\{z : |z| = 1, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ mit Gegenuhrzeigersinn-Orientierung. Berechnen Sie $\int_\gamma \ln(z)dz$.

(a) $-2i$.

(b) $(\pi - 2)i$.

(c) π.

(d) πi.

(e) $2\ln(\pi) + i$.