D-MATH, D-PHYS | Funktionentheorie | HS 2013
Prof. J. Teichmann

Serie 12

Abgabe: Bis *Montag, den 9. Dezember, bis spätestens 10.15 Uhr* in den Fächern im HG J 68. Die Online-Fragen können bis Montag, den 9. Dezember, um 8 Uhr beantwortet werden.

1. Sei eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$ gegeben, so dass $c_{-1} = 0$ und $\limsup_{k\to\infty}|c_{-k}|^{1/k} \leq R_0 < R_1 \leq \liminf_{k\to\infty}|c_k|^{-1/k}$ gilt. Zeigen Sie, dass die Reihe
$$F(z) := \sum_{k\in\mathbb{Z}_{\neq -1}} \frac{c_k}{k+1}(z-a)^{k+1}$$
für $a \in \mathbb{C}$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid R_0 < |z-a| < R_1\}$ gleichmässig konvergiert und eine holomorphe Funktion darstellt. Zeigen Sie weiter, dass F eine Stammfunktion von $f(z) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(z-a)^k$ ist. Was geht schief, falls $c_{-1} \neq 0$?

2. (a) Zeigen Sie, dass die Laurentreihe von $\frac{1}{e^z-1}$ im Nullpunkt die Form
$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k\geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}$$
mit $B_{2k} \in \mathbb{Q}$ hat. Wir nennen die Zahlen B_{2k} *Bernoullizahlen.*

   (b) Zeigen Sie, dass die Laurentreihe von $\cot(z)$ im Nullpunkt durch
$$\cot(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}$$
gegeben ist.

   (c) Verwenden Sie die Gleichung $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ und die Taylorentwicklungen von sin und cos, um die Bernoullizahlen B_2, B_4, B_6 und B_8 zu berechnen.

3. Klassifizieren Sie die Singularitäten und bestimmen Sie die Residuen der Funktionen

   (a) $\frac{1-\cos z}{z^2}$,

   (b) $e^{1/z} + 1/z$,

   (c) $(z^2+1)^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

   (d) $(z+2)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$,

   (e) $\frac{g(z)}{1+z^n}$, g holomorph,

   (f) $\frac{4z}{(z^2+2az+1)^2}$, $a > 1$.

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:
   (a) $\int_{|z|=3} \frac{e^{tz}}{z^2(z^2+2z+2)} \mathrm{d}z$, $t \in \mathbb{R}$,
   (b) $\int_{|z|=5} \frac{e^z}{\cosh z} \mathrm{d}z$,
   (c) $\int_\Gamma \frac{2+3\sin(\pi z)}{z(z-1)^2} \mathrm{d}z$, wobei Γ der Rand des Quadrats mit den Ecken $\pm 3 \pm 3i$ ist.

5. Sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ und $\gamma \in Z(\Omega)$. Welche Werte kann das Integral

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} \mathrm{d}z$$

   annehmen?

6. Online-Fragen:

1. Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$, und sei $\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Diese Laurentreihe konvergiert für alle z mit $z \neq 0$.

(b) Diese Laurentreihe konvergiert für alle z mit $|q| < |z| < 1$ und divergiert für alle z mit $|z| > 1$ und mit $|z| < |q|$.

(c) Es gilt $\displaystyle\int_{|\zeta|=q} \theta(\zeta) d\zeta = 2\pi i q$, für $q \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

(d) θ hat einen Pol in 0.

(e) Es gilt $\theta(q^2 z) = \frac{1}{qz}\theta(z)$ für alle z im Konvergenzbereich der Laurentreihe.

2. Sei $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $u(t) = \frac{1}{\cos(t)-2}$. Welche Aussagen sind korrekt?

(a) Es gilt $u(t) = f(e^{it})e^{it}$ für eine gewisse analytische Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf einem Bereich D, der den Einheitskreis enthält.

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} u(t) dt = 0$.

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} u(t) dt = -2\pi/\sqrt{3}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} u(t) dt = -2\pi$