Serie 13

Abgabe: Bis Montag, den 16. Dezember, bis spätestens 10.15 Uhr in den Fächern im HG J 68. Die Online-Fragen können bis Montag, den 16. Dezember, um 8 Uhr beantwortet werden.

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2(x)}, a > 1,$

   (b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3x)}{5-4\cos(x)}\mathrm{d}x,$

   (c) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\mathrm{d}x,$

   (d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x,$

   (e) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\mathrm{d}x,\ a > 0,$

   (f) $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x,\ a > 0,$

   (g) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x,\ a > 0,$

   (h) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x,\ a > 0.$

2. Sei $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ mit Ω offen und $\gamma(t) := e^{2\pi i t} \in \Omega$ der Weg entlang des Einheitskreises. Seien f und g holomorphe Funktionen von Ω nach $\mathbb{C}$, so dass $f(z)$ auf dem Kreis $|z| = 1$ nicht verschwindet. Wir bezeichnen die Nullstellen von f in $\mathbb{D}$ und ihre Vielfachheiten mit $a_1, \ldots, a_n$ respektive $m_1, \ldots, m_n$. Beweisen Sie die Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \sum_{1\le k\le n} g(a_k)m_k.$$

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, so dass eine Kreisscheibe $K \subset \Omega$ existiert. Sei $f : K \to \mathbb{C}$ holomorph. Falls f entlang jedes stetigen Weges in Ω analytisch fortsetzbar ist und die Fortsetzung nicht vom Weg abhängt, existiert genau eine Fortsetzung von f auf ganz Ω. Geben Sie ein Beispiel für Ω, K und f an, sodass es keine Fortsetzung von f auf Ω gibt, obwohl f entlang aller Wege in Ω analytisch fortsetzbar ist.

4. Bestimmen Sie die Anzahl Nullstellen des Polynoms $z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ in $\mathbb{D}$ mit Hilfe des Satzes von Rouché.

5. Sei h in einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ holomorph und es gelte $|h(z)| < 1$ für $|z| = 1$. Zeigen Sie, dass genau ein $z \in \mathbb{D}$ mit $h(z) = z$ existiert.

6. Zeigen Sie, dass die Gleichung $ze^{\lambda - z} = 1$ für $\lambda > 1$ genau eine Lösung in $\mathbb{D}$ hat. Zeigen Sie weiter, dass diese Lösung reell und positiv ist.

7. Wie viele Nullstellen hat das Polynom $z^4 - 6z + 3$ im Gebiet $1 < |z| < 2$?

8.* Bestimmen Sie die Anzahl Nullstellen des Polynoms $z^4 + 8z^3 + 3z^2 + 8z + 3$ in der Halbebene $\mathrm{Re} z > 0$.

9. Online-Fragen:

1. Seien $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{5})$ und γ der fünfspitzige Stern bestehend aus den Strecken, die $1, \zeta^2, \zeta^4, \zeta, \zeta^3, 1$ in dieser Reihenfolge verbinden. Bestimmen Sie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z}{1-\cos(z)}dz.$$

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

(f) 5

(g) 6

2. Wo besitzt die Funktion f mit $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ eine Stammfunktion?

(a) Auf ganz $\mathbb{C}$.

(b) Auf $\mathbb{C}$ ohne die Punkte -1 und 1.

(c) Auf $\mathbb{C}$ ohne das Intervall $[-1, 1]$.

(d) Auf $\mathbb{C}$ ohne die reelle Achse $\mathbb{R}^{\leq -1}$.

(e) Auf $\mathbb{C}$ ohne die reelle Achse $\mathbb{R}^{\geq 1}$.