Lösungen 1

1) (a) Seien $g, h \in G$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass gilt $gh = hg$. Ausmultiplizieren der Gleichung aus der Aufgabenstellung ergibt $ghgh = g^2h^2$. Wir multiplizieren von links mit g^{-1}. Wegen $g^{-1}g = 1$ ergibt dies $hgh = gh^2$. Nun multiplizieren wir von rechts mit h^{-1}, wegen $hh^{-1} = 1$ erhalten wir $hg = gh$, was zu beweisen war.

(b) (i) G ist abelsch: Seien $g, h \in G$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass gilt $gh = hg$. Wir zeigen zunächst, dass gilt $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$. Tatsächlich: Wir haben $ghh^{-1}g^{-1} = 1$, also ist $h^{-1}g^{-1}$ das (eindeutige) inverse Element von gh. Wegen $h^{-1} = h$ und $g^{-1} = g$ folgt nun

$$gh = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = hg.$$

(ii) Die Ordnung von G ist gerade: Wir beweisen zuerst folgenden

Hilfssatz: Es sei X eine endliche Menge und sei $f : X \longrightarrow X$, so dass für alle $x \in X$ gilt $f(x) \neq x$ und $f(f(x)) = x$ (Man sagt: f ist eine *fixpunktfreie Involution*). Dann hat X eine gerade Anzahl von Elementen.

Beweis des Hilfssatzes: Wir zeigen mittels vollständiger Induktion über n: Falls $|X| = 2n+1$, dann hat jede Involution $f : X \longrightarrow X$ einen Fixpunkt. Für $n = 0$ (Indunktionsverankerung) ist dies offensichtlich, das einzige Element von X ist ein Fixpunkt von f. Sei nun $n > 0$ (Induktionsschritt). Wähle ein beliebiges $x \in X$. Falls x ein Fixpunkt von f ist sind wir fertig. Falls nicht definieren wir die zweielementige Menge $S := \{x, f(x)\}$ und $X' := X \setminus S$. Es gilt $f(S) = S$. Weiter gilt $f(X') \subset X'$, denn falls $f(y) \in S$ für ein $y \in X'$ dann folgt $y = f(f(y)) \in f(S) = S$, also $y \in S$, ein Widerspruch. Damit ist die Einschränkung $f|_{X'} : X' \longrightarrow X'$ auch eine Involution. Weil $|X'| = |X| - 2 = 2(n-1) - 1$ folgt aus der Induktionsannahme, dass $f|_{X'}$ und somit auch f einen Fixpunkt hat.

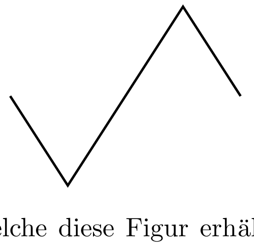
Nun zurück zur Gruppe G. Wir wählen ein nicht-triviales $g_0 \in G$. Wir behaupten, dass die Abbildung $f : G \longrightarrow G$, $g \mapsto g_0g$ eine fixpunktfreie Involution ist. Es gilt $f(g) = g \Longrightarrow g_0g = g \Longrightarrow g_0 = 1$, ein Widerspruch, also hat f keinen Fixpunkt. Weiter haben wir $f(f(g)) = g_0f(g) = g_0g_0g = g_0^{-1}g_0g = g$, also ist f eine Involution. Aus dem Hilfssatz folgt nun, dass die Ordnung $|G|$ gerade ist.

(c) (i) Die Verknüpfung ist assoziativ: Für $g, h, k \in G$ gilt $(g*h)*k = gah*k = gahak = g*hak = g*(h*k)$.

(ii) Die Verknüpfung besitzt ein neutrales Element, nämlich a^{-1}, denn für $g \in G$ gelten $g*a^{-1} = gaa^{-1} = g$ und $a^{-1}*g = a^{-1}ag = g$.

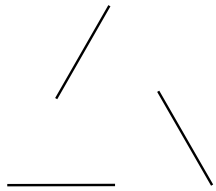
(ii) Es exisiteren Inversen: Für $g \in G$ definiere $\bar{g} := a^{-1}g^{-1}a^{-1}$. Es gelten $g*\bar{g} = g*a^{-1}g^{-1}a^{-1} = gaa^{-1}g^{-1}a^{-1} = gg^{-1}a^{-1} = a^{-1}$ und ebenso $\bar{g}*g = a^{-1}$. Also ist $\bar{g}$ das Inverse von g.

2) $n = 2$



Die einzige nicht-triviale Isometrie, welche diese Figur erhält, ist die Rotation r_π um den Winkel π um den Mittelpunkt. Die Isometriegruppe der Figur ist also $\{\mathrm{id}, r_\pi\}$. Eine andere Lösung ist ein nicht-gleichseitiges gleichschenkliges Dreieck, für welches die Isometriegruppe aus der Identität und einer Spiegelung besteht.

$n = 3$



Diese Figur wird nebst der Identität nur von den Rotationen $r_{\pi/3}$ und $r_{2\pi/3}$ um den Mittelpunkt erhalten. Damit ist die Isometriegruppe der Figur gleich $\{\mathrm{id}, r_{\pi/3}, r_{2\pi/3}\}$.

Für $n = \infty$ können wir z.B. eine Teilmenge, die aus einem einzigen Punkt besteht, wählen. Jede Rotation um diesen Punkt ist dann in der Isometriegruppe enthalten. Man kann aber auch eine Gerade, eine Halbebene oder die ganze Ebene als Teilmenge wählen. Diese werden je von unendlich vielen Translationen erhalten.

3) (a) Es seien P, Q zwei verschiedene Fixpunkte von φ, mit Abstand $s = d(P, Q)$ und sei M der Mittelpunkt von P und Q. Wir behaupten, dass M ein weiterer Fixpunkt ist. Es gilt

$$d(\varphi(M), P) = d(\varphi(M), \varphi(P)) = d(M, P) = s/2 = d(M, Q) = d(\varphi(M), \varphi(Q)) = d(\varphi(M), Q).$$

Das heisst $\varphi(M)$ hat von P und Q je den Abstand $s/2$. Dies ist nur möglich wenn $\varphi(M) = M$.

(b) Es seien P, Q, R drei nicht-kollineare Fixpunkte von φ und es sei X ein weiterer Punkt. Die Gleichung $d(\varphi(X), P) = d(\varphi(X), \varphi(P)) = d(X, P)$ besagt, dass sich $\varphi(X)$ auf dem Kreis mit Mittelpunkt P und Radius $d(X, P)$ befindet. Ebenso liegt $\varphi(X)$ auf dem Kreis um Q mit Radius $d(X, Q)$. Diese beiden Kreise schneiden sich in X und möglicherweise einem weiteren Punkt Y. Nun liegt $\varphi(X)$ aber auch auf dem Kreis um R mit Radius $d(X, R)$, und dieser Kreis hat mit den anderen beiden Kreise genau den Punkt X gemeinsam (würde auch Y auf allen drei Kreisen liegen, dann wären P, Q, R kollinear). Es ist also $\varphi(X) = X$, und da X beliebig gewählt war ist $\varphi = \mathrm{id}$.

(c) Wir zeigen zuerst: Ist φ eine Isometrie und ist ℓ die Mittelsenkrechte zweier Punkte P, Q, dann ist $\varphi(\ell)$ die Mittelsenkrechte von $\varphi(P)$ und $\varphi(Q)$. Ist nämlich $M \in \ell$ dann gilt $d(M, P) = d(M, Q)$. Also $d(\varphi(M), \varphi(P)) = d(M, P) = d(M, Q) = d(\varphi(M), \varphi(Q))$, was bedeutet, dass $\varphi(M)$ auf der Mittelsenkrechten zwischen $\varphi(P)$ und $\varphi(Q)$ liegt.
Nun zur Aufgabe: Wir wählen einen beliebigen Punkt P und betrachten die Menge $A = \{P, \varphi(P), \varphi^2(P)\}$. Wir nehmen zuerst an, dass A nicht kollinear ist. Es gilt $\varphi(A) = A$, und mit der Aussage oben folgt, dass die drei Mittelsenkrechten dieser Punkte durch φ permutiert werden. Der Schnittpunkt dieser Geraden (d.h. der Umkreismittelpunkt des Dreiecks A) ist also ein Fixpunkt von φ.
Falls A kollinear ist, dann liegt z.B. $\varphi(P)$ auf der Strecke zwischen P und $\varphi^2(P)$, also $d(P, \varphi(P)) + d(\varphi(P), \varphi^2(P)) = d(P, \varphi^2(P))$. Jeder Term in dieser Gleichung ist gleich $d(P, \varphi(P))$, also $2 \cdot d(P, \varphi(P)) = d(P, \varphi(P))$, also $d(P, \varphi(P)) = 0$ und P ist ein Fixpunkt. Ebenso verhält es sich wenn die Punkte in anderer Reihenfolge kollinear sind.

(d) Falsch, man nehme eine Rotation r_α um den Winkel $\alpha = \xi \cdot 2\pi$ mit einer irrationalen Zahl $\xi \in \mathbb{R}$. Falls $r_\alpha^n = \mathrm{id}$ für ein $n > 0$, dann ist $n \cdot \alpha = k \cdot 2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, also ist $\xi = k/n$ rational, ein Widerspruch.

4) (a) Wir setzen $m = 2n$. Jedes Element $g \in \mathbb{D}_n$ ist eine Isometrie der Ebene, welche ein regelmässiges n-gon erhält, also eine Rotation um einen Winkel $k/n \cdot 2\pi$ für ein $0 \leq k \leq n - 1$, oder eine Spiegelung. Im Falle einer Rotation r haben wir $r^m = r^{2n} = (r^n)^2 = 1^2 = 1$. Für eine Spiegelung s haben wir $s^m = s^{2n} = (s^2)^n = 1^n = 1$.

(b) Es seien $X_0, \ldots, X_{n-1}$ die Ecken eines regelmässigen n-gons D in der Ebene. Es sei s eine Spiegelung, welche D erhält. Wir können annehmen, dass die Achse von s durch den Eckpunkt X_0 läuft. Es gilt dann $s(X_i) = X_{n-i}$, wobei wir die Indices modulo n lesen, also $X_0 = X_n$ etc. Weiter sei r eine Rotation welche D erhält. Es gibt ein $0 \leq k \leq n-1$, so dass $r(X_i) = X_{i+k}$. Nun nehmen wir an, es gelte $rs = sr$. Wir haben $r(s(X_0)) = s(r(X_0))$, woraus folgt $r(X_0) = s(X_k)$ und schliesslich $X_k = X_{n-k}$. Also gilt $k = n - k \pmod{n}$, d.h. $2k = 0 \pmod{n}$, also ist n

gerade. Wir haben gezeigt: Falls in $\mathbb{D}_n$ eine Spiegelung mit einer Rotation kommutiert, dann ist n gerade. Nun kann man leicht überprüfen, dass in $\mathbb{D}_{2n}$ die Rotation r_π um den Winkel π tatsächlich die Gleichung $rg = gr$ für alle $g \in \mathbb{D}_{2n}$ erfüllt.

5) Wir folgen dem Beweis von Lemma 2 in *Characterizing Motions by Unit Distance Invariance*, Richard L. Bishop, Mathematics Magazine, Vol. 46, No. 3 (1973).

Wir zeigen zuerst

Lemma. Falls φ den Abstand $r > 0$ erhält, dann gilt für jede ganze Zahl $n \geq 1$ und alle Punkte P, Q

$$d(P,Q) \leq nr \quad \Longrightarrow \quad d(\varphi(P), \varphi(Q)) \leq nr.$$

Beweis: Es sei k die ganze Zahl mit $(k-1)r < d(P,Q) \leq kr$. Es gilt $k \leq n$. Auf dem Geradensegment zwischen P und Q liegen die Punkte $P = X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ so dass $d(X_{i-1}, X_i) = r$ für $1 \leq i \leq k-1$. Weiter wählen wir einen Punkt X_k, so dass gilt $d(X_{k-1}, X_k) = d(X_k, Q) = r$ (Dieser Punkt liegt im allgemeinen *nicht* auf dem betrachteten Geradensegment). Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} d(\varphi(P), \varphi(Q)) &= d(\varphi(X_1), \varphi(Q)) \\ &\leq d(\varphi(X_1), \varphi(X_2)) + \cdots + d(\varphi(X_{k-1}), \varphi(X_k)) + d(\varphi(X_k), \varphi(Q)) \\ &= r + \cdots + r + r \\ &= kr \\ &\leq nr. \end{aligned}$$

Nun zur Aufgabe. Seien P, Q zwei beliebige Punkte und sei $a = d(P,Q)$. Da φ beliebig grosse Distanzen erhält können wir $b > 0$ wählen, so dass der Abstand $a + b$ erhalten bleibt. Es sei R der Punkt welcher von P den Abstand $a + b$ hat und für den Q auf dem Geradensegment von P nach R liegt. Wir schreiben $s = d(\varphi(P), \varphi(Q))$ und $t = d(\varphi(Q), \varphi(R))$. Wir wollen zeigen, dass gilt $s = a$. Wir nehmen an, dass der Abstand r von φ erhalten wird. Es seien m, n die ganzen Zahlen für die gilt $(m-1)r < a \leq mr$ und $(n-1)r < b \leq nr$. Aus dem Lemma folgt $s \leq mr$ und $t \leq nr$. Es gilt

$$s - a < a - (m-1)r \leq mr - (m-1)r = r,$$

also $s - a < r$, und ebenso $t - b < r$. Die Dreiecksungleichung im Dreieck $(\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R))$ ergibt $a + b \leq s + t$, also $a - s \leq t - b < r$. Das heisst $|s - a| < r$. Weil φ nach Annahme beliebig kleine r erhält, folgt $s = a$, also $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P,Q)$. Somit ist φ eine Isometrie.

Lösungen der Online-Aufgaben

1. Es sei G eine Gruppe und $g, h \in G$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Aus $g^2 = h^2$ folgt $g = h$.

Gegenbeispiel: $G = \mathbb{D}_n$ und g, h zwei Spiegelungen an verschiedenen Symmetrieachsen des n-Ecks.

✓ (b) Sei $n > 0$. Aus $h^n = 1$ folgt $(g^{-1}hg)^n = 1$.

Beweis: Sei $h^n = 1$. Es gilt $(g^{-1}hg)^n = g^{-1}hgg^{-1}hg \cdots g^{-1}hg = g^{-1}hh \cdots hg = g^{-1}h^n g = g^{-1}g = 1$. Dabei haben wir die Assoziativität der Gruppenverknüpfung und die Identitäten $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$ verwendet.

(c) Für jedes $n > 0$ besitzt die Gleichung $x^n = g$ eine Lösung $x \in G$.

Gegenbeispiel: In der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ besitzt die Gleichung $2x = 1$ keine Lösung. (In $(\mathbb{Z}, +)$ schreiben wir $2x$ statt x^2.)

✓ (d) Die Gleichung $g^{-1}xg = h$ besitzt genau eine Lösung $x \in G$.

Beweis: Multipliziere die Gleichung von links mit g und von rechts mit g^{-1}. Es folgt dass $x = ghg^{-1}$ die eindeutige Lösung der Gleichung ist.

2. Es seien φ und ψ Isometrien der Ebene. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

✓ (a) Falls φ und ψ Translationen sind, dann ist auch $\varphi\psi$ eine Translation.

(b) Falls φ und ψ Geradenspiegelungen sind, dann gilt

$$\varphi\psi = \psi\varphi \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \psi.$$

Gegenbeispiel: Spiegelungen an zwei senkrecht aufeinander stehenden Geraden.

(c) Falls φ und ψ Geradenspiegelungen sind, dann hat $\varphi\psi$ einen Fixpunkt.

Gegenbeispiel: Spiegelungen an zwei parallelen Geraden, $\varphi\psi$ ist in diesem Fall eine Translation.

(d) Jeder Fixpunkt von φ ist auch ein Fixpunkt von $\psi^{-1}\varphi\psi$.

Gegenbeispiel: φ eine Spiegelung an einer geraden ℓ und ψ eine Translation deren Richtung nicht parallel zu ℓ ist. Jeder Punkt auf ℓ wird von φ fixiert, aber nicht von $\psi^{-1}\varphi\psi$.

✓ (e) Falls φ einen Fixpunkt hat, dann hat auch $\psi^{-1}\varphi\psi$ einen Fixpunkt.

Beweis: $\varphi(P) = P \Longrightarrow (\psi^{-1}\varphi\psi)(\psi^{-1}(P)) = \psi^{-1}(P)$.