Lösungen 2

1) (a) Seien $h, h' \in f(G)$. Dann gibt es $g, g' \in G$ mit $f(g) = h$, $f(g') = h'$, also $hh' = f(g)f(g') = f(gg') \in f(G)$. Weiter ist $h^{-1} = f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \in f(G)$.

(b) Es seien $g, g' \in \ker f$. Dann gilt $f(gg') = f(g)f(g') = e_H e_H = e_H$, also $gg' \in \ker f$. Weiter gilt $f(g^{-1}) = f(g)^{-1} = e_H^{-1} = e_H$, also $g^{-1} \in \ker f$.

(c) Wir zeigen die Äquivalenzen (i) $\Leftrightarrow$ (ii) und (ii) $\Leftrightarrow$ (iii):
(i) $\Rightarrow$ (ii): Wir zeigen die Kontraposition. Angenommen es gilt $\ker f \neq \{e_G\}$, dann gibt es ein $g \in G$, $g \neq e_G$, mit $f(g) = e_H$. Wegen $f(e_G) = e_H$ ist f dann nicht injektiv.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen die Kontraposition. Angenommen f sei nicht injektiv. Dann gibt es $g, g' \in G$, $g \neq g'$, mit $f(g) = f(g')$. Es folgt $e_H = f(g)^{-1}f(g') = f(g^{-1})f(g') = f(g^{-1}g')$. Also ist $g^{-1}g' \in \ker f$ und es gilt somit $\ker f \neq \{e_G\}$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\ker f = \{e_G\}$ bedeutet gemäss Definition $f^{-1}(\{e_H\}) = \{e_G\}$, also können wir $h = e_H$ wählen.
(iii) $\Rightarrow$ (ii): Wir zeigen die Kontraposition. Angenommen $\ker f \neq \{e_G\}$. Dann gibt es $g_0 \in G$, $g_0 \neq e_G$, mit $f(g_0) = e$. Sei nun $h \in H$. Falls $f^{-1}(\{h\}) = \varnothing$, dann ist $|f^{-1}(\{h\})| = 0$. Andernfalls können wir $g \in f^{-1}(\{h\})$ wählen. Es gilt dann $f(gg_0) = f(g)f(g_0) = he_H = h$, also $gg_0 \in f^{-1}(\{h\})$. Damit gilt $|f^{-1}(\{h\})| \geq 2$.

(d) Seien $h, h' \in H$. Dann gibt es (eindeutige) $g, g' \in G$ mit $f(g) = h$, $f(g') = h'$. Es gilt $f^{-1}(hh') = f^{-1}(f(g)f(g')) = f^{-1}(f(gg')) = gg' = f^{-1}(h)f^{-1}(h')$, also ist f^{-1} ein Homomorphismus.

2) Es sei A_n ein regelmässiges n-Eck in der Ebene mit nummerierten Ecken $1, 2, \ldots, n$. Wir wissen, dass jedes Element $g \in \mathbb{D}_n$ einer Isometrie der Ebene entspricht, welches A_n auf sich selbst abbildet. Durch solch eine Abbildung werden die Ecken von A_n permutiert, das heisst wir erhalten eine Permutation der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, also ein Element $\sigma \in S_n$. Wir definieren $f_n(g) = \sigma$.
Seien nun $g, g' \in \mathbb{D}_n$ mit zugehörigen Permutationen σ, σ'. Dann ist die zu gg' gehörige Permutation gleich $\sigma\sigma'$, also $f_n(gg') = \sigma\sigma' = f_n(g)f_n(g')$, d.h. f_n ist ein Homomorphismus.
Um zu zeigen, dass f_n injektiv ist verwenden wir Aufgabe 1(c) und zeigen, dass $\ker f_n = \{e\}$. Tatsächlich, falls $g \in \ker f_n$, dann ist die zu g gehörige Permutation der Eckpunkte trivial, das heisst g fixiert alle $n \geq 3$ Eckpunkte. Mit Aufgabe 3(b), Serie 1, folgt dass g als Isometrie der Ebene die Identität ist, also $g = e$.
Um zu überprüfen wann f_n ein Isomorphismus ist, beachte $|D_n| = 2n$ und $|S_n| = n!$. Ist $n \geq 4$ dann gilt $n! > 2n$ und f_n ist dann nicht bijektiv, also kein Isomorphismus. Für $n = 3$ gilt $n! = 6 = 2n$, also ist f_3 eine Bijektion (denn eine injektive Abbildung zwischen endlichen Mengen gleicher Kardinalität ist bijektiv). Gemäss Aufgabe 1(d) ist f_3 also ein Isomorphismus.

3) (a) Sei $g \in G$. Betrachte die Menge $\{g^n \,|\, n \geq 1\} \subset G$. Diese Menge ist endlich, also gibt es m, n, $m \neq n$, mit $g^m = g^n$, also $g^m g^{-n} = g^{m-n} = e$, also $\operatorname{ord}(g) \leq |m - n| < \infty$.

(b) Für $k = 1$ wähle die triviale Permutation (1). Für $k \geq 2$ wähle den k-Zykel $(12 \cdots k)$.

4) (a) Wir fassen wie üblich jedes Element $g \in \mathbb{D}_n$ als Isometrie φ_g der Ebene auf, welches A_n auf sich selbst abbildet. Wir wissen, dass φ_g als Isometrie das Geradensegment zwischen zwei Punkten P, Q auf das Segment zwischen den Bildpunkten $\varphi_g(P), \varphi_g(Q)$ abbildet. Jedes φ_g bildet also Diagonalen auf Diagonalen ab. Wir definieren daher

$$\mathbb{D}_n \times D_n \longrightarrow D_n$$

durch $(g, \delta) \mapsto g.\delta := \varphi_g(\delta)$. Dies ist tatsächlich eine Operation: Für jedes $\delta \in D_n$ gilt $e.\delta = \varphi_e(\delta) = \mathrm{id}(\delta) = \delta$, und für alle $g, h \in \mathbb{D}_n$ und jedes $\delta \in D_n$ gilt $g.(h.\delta) = \varphi_g(\varphi_h(\delta)) = (\varphi_g \varphi_h)(\delta) = \varphi_{gh}(\delta) = gh.\delta$.

(b) Es sei $\mathbb{D}_n\delta$ die Bahn von $\delta \in D_n$ unter der betrachteten Operation. Wir behaupten, dass für $\delta' \in D_n$ gilt: $\delta' \in \mathbb{D}_n\delta$, genau dann wenn δ und δ' die gleiche Länge haben.
Tatsächlich ist dies eine notwendige Bedingung, denn falls $\delta' \in \mathbb{D}_n\delta$, dann existiert $g \in \mathbb{D}_n$ mit $g.\delta = \delta'$, also $\varphi_g(\delta) = \delta'$. Weil Isometrien die Länge von Geradensegmenten erhalten haben δ und δ' dieselbe Länge.
Nun müssen wir zeigen, dass die Bedingung auch hinreichend ist. Sei also $\delta' \in D_n$ eine Diagonale die gleich lang wie δ ist. Wir suchen ein $g \in \mathbb{D}_n$, so dass gilt $g.\delta' = \delta$ und somit $\delta' \in \mathbb{D}_n\delta$. Dies machen wir folgendermassen: Es sei P einer der Endpunkte von δ. Es existiert eine Rotation $r \in \mathbb{D}_n$, welche ein Endpunkt von δ' auf P abbildet. Es sind dann δ und $r.\delta'$ zwei Diagonalen welche beide vom Punkt P ausgehen und beide dieselbe Länge haben. Falls gilt $r.\delta' = \delta$ sind wir fertig. Falls nicht, dann ist δ' das Bild von δ unter der Spiegelung s deren Achse durch P läuft. Es gilt dann also $s.(r.\delta') = \delta$, also $sr.\delta' = \delta$.
Wir haben gezeigt, dass die Anzahl der Bahnen der Operation gleich der Anzahl der möglichen Längen von Diagonalen in A_n ist. Diese Anzahl ist gleich $\frac{n-2}{2}$ falls n gerade ist, und gleich $\frac{n-3}{2}$ falls n ungerade ist.

5) (a) Wähle drei nicht kollineare Punkte P, Q, R in der Ebene, so dass die Punkte in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn orientiert sind. Für jede Spiegelung ψ ist das Tripel $\psi(P), \psi(Q), \psi(R)$ im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Wenn man nun zwei (möglicherweise verschiedene) Spiegelungen hintereinander auf P, Q, R anwendet, dann ist das Tripel wieder im Uhrzeigersinn orientiert. Wir sehen, dass eine ungerade Anzahl von Spiegelungen hintereinander auf P, Q, R angewendet die Orientierung stets umkehrt. Jede Rotation erhält die Orientierung und kann daher nicht die Verknüpfung von drei Spiegelungen sein.

(b) Sei $\varphi = \psi\psi'$ eine Komposition zweier Spiegelungen. Wir unterscheiden zwei Fälle: Im ersten Fall sind die Spiegelungsachsen ℓ, ℓ' von ψ, ψ' parallel. Dann ist φ eine Translation und hat keinen Fixpunkt. Sind die Achsen nicht parallel dann haben sie einen Schnittpunkt und φ ist dann eine Rotation um diesen Punkt, welcher ein Fixpunkt ist.

6) Wir zeigen, dass die vier Gruppen paarweise nicht-isomorph sind. Dazu finden wir geeignete Eigenschaften von Gruppen, die unter Isomorphismen erhalten bleiben. Wir sagen, dass eine Gruppe G *zyklisch* ist, falls es ein $g \in G$ gibt, so dass $G = \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ hat diese Eigenschaft (wähle $g = 1$), die anderen Gruppen nicht (dies sieht man z.B. daran, dass für $r = p/q \in \mathbb{Q}$ die Nenner der Zahlen nr und r^n für jedes $n \in \mathbb{Z}$ nur Primfaktoren haben, die auch Primfaktor von p oder q sind). Also ist $(\mathbb{Z}, +)$ zu keiner der anderen Gruppen isomorph. Nun sei G eine der drei übrigen Gruppen. Für ein Element $a \in G$ betrachten wir die Gleichung $x^2 = a$. Es gilt:

- In $(\mathbb{Q}, +)$ existiert für jedes a genau eine Lösung $x = a/2$.
- In $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ existieren genau zwei Lösungen $x = \pm\sqrt{a}$ falls $a > 0$ und $\sqrt{a}$ rational ist, und keine Lösung andernfalls.
- In $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ existiert genau eine Lösung $x = \sqrt{a}$ falls $a > 0$ und $\sqrt{a}$ rational ist, und keine Lösung andernfalls.

Weil das Lösungsverhalten der Gleichung $x^2 = a$ für isomorphe Gruppen das gleiche ist, sind diese drei Gruppen paarweise nicht-isomorph.

Lösungen der Online-Aufgaben

1. Es sei G eine nicht-triviale Gruppe. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) G hat mindestens zwei verschiedene Untergruppen.

Die triviale Untergruppe $\{e\}$ und die ganze Gruppe G sind zwei Untergruppen die verschieden sind, wenn G nicht-trivial ist.

√ (b) Sind H_1, H_2 Untergruppen von G, so ist auch $H_1 \cap H_2$ eine Untergruppe von G.

Seien $h, h' \in H_1 \cap H_2$. Weil H_1, H_2 Untergruppen sind, ist $hh' \in H_1$ und $hh' \in H_2$, also $hh' \in H_1 \cap H_2$. Weiter ist $h^{-1} \in H_1$ und $h^{-1} \in H_2$, also $h^{-1} \in H_1 \cap H_2$. Damit ist $H_1 \cap H_2$ eine Untergruppe von G.

(c) Sind H_1, H_2 Untergruppen von G, so ist auch $H_1 \cup H_2$ eine Untergruppe von G.

Gegenbeispiel: Seien $s_1, s_2 \in \mathbb{D}_n$ zwei verschiedene Spiegelungen. Dann sind $H_1 = \{e, s_1\}$ und $H_2 = \{e, s_2\}$ Untergruppen von $\mathbb{D}_n$, aber $H_1 \cup H_2 = \{e, s_1, s_2\}$ nicht, denn das Element $s_1 s_2$ ist eine Rotation und somit nicht in $H_1 \cup H_2$ enthalten.

2. Es sei G eine Gruppe. Wir betrachten die Abbildung

$$I : G \longrightarrow G, \quad I(g) = g^{-1}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Falls G abelsch ist, dann ist die Abbildung I ein Homomorphismus.

$I(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1} = I(g)I(h)$

√ (b) Falls G abelsch ist, dann ist die Abbildung I ein Isomorphismus.

Die Abbildung I ist bijektiv, also ein bijektiver Homomorphismus, also ein Isomorphismus.

√ (c) Falls I ein Isomorphismus ist, dann ist G abelsch.

Seien $g, h \in G$. Es ist

$$gh = ((gh)^{-1})^{-1} = I(I(gh)) = I(I(g)I(h)) = I(g^{-1}h^{-1}) = (g^{-1}h^{-1})^{-1} = hg$$

3. Es sei G eine Gruppe. Für $h \in G$ betrachten wir die Abbildungen

$$c_h, l_h : G \longrightarrow G, \quad c_h(g) = h^{-1}gh, \quad l_h(g) = hg.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung c_h bijektiv.

surjektiv: Sei $g \in G$ gegeben. Dann ist $c_h(hgh^{-1}) = g$. injektiv: Sei $c_h(g) = c_h(g')$. Dann ist $h^{-1}gh = h^{-1}g'h$. Multipliziere von links mit h, dann von rechts mit h^{-1}, es folgt $g = g'$.

√ (b) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung c_h ein Isomorphismus.

Es ist $c_h(gg') = h^{-1}gg'h = h^{-1}ghh^{-1}g'h = c_h(g)c_h(g')$, also ist c_h ein bijektiver Homomorphismus, also ein Isomorphismus.

√ (c) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung l_h bijektiv.

surjektiv: Sei $g \in G$ gegeben. Es ist $l_h(h^{-1}g) = g$. injektiv: Sei $l_h(g) = l_h(g')$. Dann ist $hg = hg'$. Multipliziere von links mit h^{-1}, es folgt $g = g'$.

(d) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung l_h ein Isomorphismus.

Die Gleichung $l_h(gg') = l_h(g)l_h(h')$ bedeutet $hgg' = hghg'$. Multipliziere von links mit $(hg)^{-1}$ dann von rechts mit g'^{-1}. Es folgt $e = h$. Also ist l_h für $h \neq e$ kein Homomorphismus, insbesondere kein Isomorphismus.