Lösungen 3

1) (a) Wir verwenden die Zykelschreibweise für die Elemente von S_n, so dass

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

Die Gruppe besteht also aus dem neutralen Element, drei 2-Zykeln (genannt *Transpositionen*) und zwei 3-Zykeln. Wir verwenden das folgende

Lemma: Ist H eine Untergruppe von S_3 die sowohl eine Transposition als auch einen 3-Zykel enthält, dann ist $H = S_3$.
Beweis: Es seien $(12), (123) \in H$. Es gelten $(12)(123) = (23)$, $(12)(123)(123) = (13)$, $(123)(123) = (132)$. Also gilt $H = S_3$. Ebenso verhält es sich, wenn man mit einer beliebigen Transposition τ und einem beliebigen 3-Zykel σ beginnt: $\tau\sigma$ und $\tau\sigma^2$ sind die fehlenden Transpositionen, σ^2 ist der fehlende 3-Zykel.

Wir müssen uns also nur um Untergruppen kümmern, die nebst dem neutralen Element nur Transpositionen oder nur 3-Zykel enthalten. Für jede Transposition τ gelten $\tau^{-1} = \tau$ und $\tau^2 = (1)$, also ist $\{(1), \tau\}$ eine Untergruppe. Falls eine Untergruppe H zwei Transpositionen τ, τ' enthält, dann folgt mit dem Lemma $H = S_3$, denn $\tau\tau'$ ist ein 3-Zykel. Falls die Untergruppe H einen 3-Zykel σ enthält, dann ist σ^2 der andere 3-Zykel und $\sigma^3 = (1)$. Dies ergibt die Untergruppe $\{(1), (123), (132)\}$. Insgesamt haben wir die folgenden Untergruppen:

$$\begin{aligned}
&\{(1)\}\\
&\{(1), (12)\}\\
&\{(1), (13)\}\\
&\{(1), (23)\}\\
&\{(1), (123), (132)\}\\
&S_3.
\end{aligned}$$

(b) Es seien H, H' zwei isomorphe Untergruppen von S_3. Falls $H = H'$ dann sind die beiden offensichtlich konjugiert zueinander. Sei also $H \neq H'$. Mit Hilfe der Liste von Teil (a) sehen wir, dass $H = \{(1), \tau\}$ und $H' = \{(1), \tau'\}$ für zwei Transpositionen τ, τ' gelten muss. Es sei τ'' die dritte Transposition in S_3. Es gilt $\tau''\,\tau\,(\tau'')^{-1} = \tau'$ wie man leicht nachrechnet, z.B. $(12)(23)(12)^{-1} = (12)(23)(12) = (12)(132) = (13)$. Also gilt $H' = \tau'' H (\tau'')^{-1}$, d.h. H und H' sind konjugiert zueinander.

(c) Wir verwenden das folgende

Lemma: Ist $\sigma = (k_1 k_2 \cdots k_l)$ ein Zykel in S_n und $\rho \in S_n$ beliebig, dann gilt

$$\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(k_1)\rho(k_2)\cdots\rho(k_l)),$$

also ist jedes Konjugierte eines l-Zykels wieder ein l-Zykel.

Beweis: Nachrechnen!

Für $n \geq 4$ wählen wir nun die Untergruppen $H = \{(1), (12)\}$ und $H' = \{(1), (12)(34)\}$ von S_n. Diese Gruppen sind isomorph. Aus dem Lemma folgt, dass für jedes $\sigma \in S_n$ das Konjugierte $\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = \sigma(12)\sigma^{-1}\sigma(34)\sigma^{-1}$ von der Form $(ab)(cd)$ ist. Weil H kein solches Element enthält sind H und H' nicht konjugiert zueinander.

2) (a) In der Klassifikation der endlichen Untergruppen von $O(2)$ (Knörrer, Satz 1.5) haben alle Gruppen eine gerade Anzahl von Elementen, ausser die Gruppen C_n für ungerade n. Es folgt, dass H und H' konjugiert zu C_{15} sind, womit sie auch konjugiert zueinander sind.

(b) Die Gruppe $O(2)$ besteht aus allen Isometrien die einen Punkt O der Ebene fixieren. Dies sind genau die Rotationen um diesen Punkt und die Spiegelungen an Geraden durch diesen Punkt. Weil davon nur die Rotationen die Orientierung der Ebene erhalten, folgt dass $SO(2)$ genau die Gruppe der Rotationen um O ist. Sei nun H eine endliche Untergruppe von $SO(2)$. Dann ist H auch eine endliche Untergruppe von $O(2)$. Mit der Klassifikation dieser Gruppen sehen wir, dass H konjugiert zu einer der Gruppen C_n ist, denn jede andere Gruppe enthält eine Spiegelung.

(c) Es sei H eine endliche Gruppe die φ, ψ enthält. Zunächst muss gelten $\alpha = r \cdot 2\pi$ für eine rationale Zahl r, denn sonst hat φ unendliche Ordnung und H ist eine unendliche Gruppe (siehe Lösung zu Aufgabe 3d, Serie 1). Weil alle Elemente einer endlichen Isometriegruppe der Ebene einen gemeinsamen Fixpunkt haben (siehe Knörrer, Abschnitt 1.3) muss gelten $P \in \ell$, denn sonst haben φ und ψ keinen gemeinsamen Fixpunkt. Wir behaupten, dass dies die einzigen Bedingungen an P, α, ℓ sind. Tatsächlich, sei $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 2\pi$ und $P \in \ell$. Dann sind φ, ψ enthalten in der Symmetriegruppe des n-Ecks welches Mittelpunkt P und einen Eckpunkt auf ℓ hat. Diese Gruppe ist (isomorph zu) $\mathbb{D}_n$, also endlich.

3) Falls f eine Isometrie ist, dann ist $a = 0$, denn für $a \neq 0$ ist f nicht injektiv. (Weil dann gilt $f(0) = f(-b/a) = d$, oder, falls $b = 0$, $f(1) = f(-1) = a + d$.) Sei also $f(z) = bz + c$. Diese Abbildung ist eine Isometrie, falls $|z - w| = |f(z) - f(w)|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$, also falls

$$|z - w| = |bz + c - (bw + c)| = |b(z - w)| = |b||z - w|.$$

Daraus folgt, dass f eine Isometrie ist, genau dann wenn $|b| = 1$. Insgesamt muss also gelten $a = 0$, $|b| = 1$ und c kann beliebig sein.

4) (a) Wir schreiben in Polarform

$$\frac{x - y}{x - z} = re^{i\alpha},$$

wobei $\alpha \in [0, 2\pi)$ und $r > 0$ (da $x \neq y$). Diese Zahl ist reell, genau dann wenn gilt $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$. Die äquivalente Gleichung

$$x - y = re^{i\alpha}(x - z)$$

besagt, dass man die Strecke von x nach y erhält indem man die Strecke von x nach z um den Winkel α um den Punkt x rotiert und um den Faktor r streckt. Die Punkte x, y, z sind kollinear, genau dann wenn die beiden Strecken sind parallel sind, also genau dann wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$. Gemäss der Bemerkung oben ist dies der Fall, genau dann wenn der betrachtete Quotient reell ist.

(b) Wir lösen das Problem in der komplexen Zahlebene. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Ecken x, y, z des Dreiecks auf dem Einheitskreis $\{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, |\zeta| = 1\}$ liegen. Wir beweisen, dass die komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ s &= \tfrac{1}{3}(x + y + z) \\ h &= x + y + z. \end{aligned}$$

den Punkten U, S, H entsprechen. Wegen $\frac{u-s}{u-h} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ folgt die Behauptung damit aus Teil (a). (Es folgt auch, dass in jedem Dreieck der Abstand von U zu H dreimal so gross ist wie der Abstand von U zu S.)

$u = 0$ ist der Umkreismittelpunkt: Dies ist offensichtlich, da das Dreieck auf dem Einheitskreis liegt, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist.

$s = \frac{1}{3}(x+y+z)$ ist der Schwerpunkt: Gemäss Definition des Schwerpunkts ist s der Schnittpunkt der Schwerelinien, der Geraden welche die Ecken mit den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkten verbinden. Die Schwerelinie durch y läuft durch den Punkt $m = \frac{1}{2}(x + y)$. Es gilt

$$\frac{m - y}{s - y} = \frac{\frac{1}{2}(x + z) - y}{\frac{1}{3}(x + y + z) - y} = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$$

was gemäss Teil (a) bedeutet, dass die s auf der Geraden zwischen m und y liegt, also auf der betrachteten Schwerelinie. Ebenso sieht mann, dass s auf den beiden anderen Schwerelinien liegt. (Bemerkung: Wir haben hier nicht verwendet, dass das Dreieck auf dem Einheitskreis liegt.)

$h = x+y+z$ ist der Höhenschnittpunkt: Gemäss Definition liegt der Höhenschnittpunkt auf den Höhenlinien, den Geraden welche durch einen Eckpunkt laufen und senkrecht auf die gegenüberliegende Seite stehen. Wir müssen also z.B. zeigen, dass die Gerade durch y und h senkrecht auf die Gerade durch x und z steht. Dazu verwenden wir verwenden zwei Hilfssätze:

Lemma 1: Für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, $c \neq d$, steht die Gerade durch a und b senkrecht auf die Gerade durch b und d, genau dann wenn gilt

$$\frac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R}.$$

Beweis: Analog zu Teil (a), siehe auch die Lösung zu Online-Aufgabe 3.

Lemma 2: Sind $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| = |b| = 1$ und $a \neq b$ dann ist

$$\frac{a+b}{a-b} \in i\mathbb{R}.$$

Beweis: Sei w der betrachtete Quotient. Es ist $a\overline{a} = b\overline{b} = 1$. Also

$$\overline{w} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{b+a}{b-a} = -w,$$

d.h. $w + \overline{w} = 0$, was gleichbedeutend ist mit $w \in i\mathbb{R}$.

Wir haben nun

$$\frac{y-h}{x-z} = \frac{y-(x+y+z)}{x-z} = \frac{z+x}{z-x}.$$

Mit den beiden Lemmas folgt, dass die betrachteten Geraden senkrecht aufeinander stehen. Ebenso verhält es sich mit den anderen beiden Höhenlinien, d.h. $h = x + y + z$ ist tatsächlich der Höhenschnittpunkt.

5) Wir verwenden $|\zeta| = |\zeta^2| = 1$ und $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$. Es gelten

$$|y-z| = |\zeta^2||y-z| = |\zeta^2 y - \zeta^2 z| = |\zeta^2 y + x + \zeta y| = |x + (\zeta + \zeta^2)y| = |x-y|$$

und

$$|z-x| = |z + \zeta y + \zeta^2 z| = |(1+\zeta^2)z + \zeta y| = |-\zeta z - \zeta y| = |-\zeta||y-z| = |y-z|.$$

also $|x-y| = |y-z| = |z-x|$, d.h. das Dreieck mit Eckpunkten x, y, z ist gleichseitig. Die Umkehrung der Aussage gilt nicht, wähle z.B. das gleichseitige Dreieck mit Eckpunkten $x = 1$, $y = \zeta^2$, $z = \zeta$. Es gilt dann $x + \zeta y + \zeta^2 z = 1 + \zeta^3 + \zeta^3 = 3$. Man kann zeigen, dass die Gleichung $x + \zeta y + \zeta^2 z = 0$ genau dann gilt, wenn die Punkte x, y, z die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind *und* in dieser Reihenfolge positiv orientiert sind.

6) Schreibe $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$. Wir haben die Gleichungen

$$a + b + c = 0$$
$$a^7 + b^7 + c^7 = 0,$$

aus denen folgt

$$(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 0.$$

Ausmultiplizieren und Faktorisieren liefert die äquivalente Gleichung

$$7ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)^2 = 0.$$

Nun sind $a, b, a+b \neq 0$, also muss gelten $a^2 + ab + b^2 = 0$. Daraus folgt

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0$$

also $a^3 = b^3$, also $|a|^3 = |b|^3$, also $|a| = |b|$, also $|x-y| = |y-z|$. Ebenso zeigt man $|y-z| = |z-x|$.

Lösungen der Online-Aufgaben

1. Es seien H, H' zwei Untergruppen einer endlichen Gruppe G. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Falls H, H' isomorph sind dann sind sie konjugiert zueinander.

In der symmetrischen Gruppe S_4 sind die beiden Untergruppen $H = \{(1), (12)\}$ und $H' = \{(1), (12)(34)\}$ isomorph (denn es gibt, bis auf Isomorphie, nur eine Gruppe mit zwei Elementen), aber nicht konjugiert zueinander (denn die Elemente (12) und (12)(34) sind nicht konjugiert zueinander, da sie eine andere Zykelstruktur haben).

$\surd$ (b) Falls H, H' konjugiert zueinander sind, dann gilt $|H| = |H'|$.

Ja, jede Konjugation $c_h : G \longrightarrow G$, $g \mapsto hgh^{-1}$, ist ein Isomorphismus, insbesondere eine Bijektion, also gilt $c_h(H) = H' \Longrightarrow |H| = |H'|$.

(c) Falls gilt $|H| = |H'|$ dann sind sie konjugiert zueinander

Betrachte wie im Teil (a) die Untergruppen H, H' der symmetrischen Gruppe S_4, gegeben durch $H = \{(1), (12)\}$ und $H' = \{(1), (12)(34)\}$.

(d) Falls gilt $|H| = |H'|$ dann sind sie isomorph zueinander

Betrachte die Untergruppen H, H' der symmetrischen Gruppe S_4, gegeben durch $H = \{(1), (1234), (13)(24), (1432)\}$ und $H' = \{(1), (12), (34), (12)(34)\}$. Es gilt $|H| = |H'| = 4$, aber die Gruppen sind nicht isomorph. Das sieht man z.B. daran, dass gilt $h^2 = (1)$ für jedes $h \in H'$, währenddem in H gilt $(1234)^2 = (13)(24) \neq (1)$. Tatsächlich ist ist H isomorph zur zyklischen Gruppe C_4 und H' ist isomorph zur Kleinschen Vierergruppe V_4.

2. Es seien H, H' zwei Untergruppen einer endlichen Gruppe G. Es gelte $|H| = |H'| = \frac{1}{2}|G|$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Falls H, H' isomorph sind, dann gilt $H = H'$.

Betrachte die Kleinsche Vierergruppe V_4. Es seien $\psi_1, \psi_2 \in V_4$ die beiden Spiegelungen, die in dieser Gruppe enthalten sind. Für die beiden Untergruppen $H = \{\mathrm{id}, \psi_1\}$ und $H' = \{\mathrm{id}, \psi_2\}$ gilt $|H| = |H'| = \frac{1}{2}|V_4| = 2$, aber $H \neq H'$.

$\surd$ (b) Falls H, H' konjugiert zueinander sind, dann gilt $H = H'$.

Wir nehmen an es gelte $gHg^{-1} = H'$ für ein $g \in G$. Falls $g \in H$ dann folgt $H = H'$ und wir sind fertig. Sei also $g \in G \backslash H$. Es gilt dann $H \cap gH = H \cap Hg = \emptyset$ (kleine Übungsaufgabe). Wegen $|H| = |gH| = |Hg| = \frac{1}{2}|G|$ folgt daraus $G = H \cup gH = H \cup Hg$, wobei die Vereinigungen disjunkt sind. Damit folgt nun $gH = Hg$, denn diese Mengen sind beide gleich $G \backslash H$, und diese Gleichung ist äquivalent zu $gHg^{-1} = H$, also gilt $H = H'$

(c) In jedem Fall gilt $H = H'$.

Siehe Teil (a)

3. Es seien $x, y, z \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden, so dass gilt

$$\overline{(x-y)}/(x-y) + \overline{(x-z)}/(x-z) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) x liegt auf der Strecke zwischen x und y.

(b) $|x-y| = |x-z|$

$\surd$ (c) Die Strecke zwischen x und y steht senkrecht auf die Strecke zwischen x und z.

(d) Die Strecke zwischen x und y ist parallel zur Strecke zwischen x und z.

Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$\overline{\left(\frac{x-y}{x-z}\right)} + \frac{x-y}{x-z} = 0$$

Dies ist gleichbedutend damit, dass $\frac{x-y}{x-z}$ eine rein imaginäre Zahl ist, also

$$\frac{x-y}{x-z} \in i\mathbb{R}$$

Es gilt also $x - y = \lambda i(x-z)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $\lambda i = \lambda e^{i\pi/2}$ bedeutet dies, dass $x - y$ durch Rotation um $90°$ und Streckung um den Faktor λ aus $x - z$ hervorgeht. Es folgt, dass die Strecke von x nach y senkrecht auf die Strecke von x nach z steht.