Lösungen 4

1) (a) Es ist

$$\begin{aligned}\overline{y}\,\overline{x} &= (y_0 - \vec{y})(x_0 - \vec{x}) \\ &= (y_0x_0 - (-\vec{y})\cdot(-\vec{x})) + (y_0(-\vec{x}) + x_0(-\vec{y}) + (-\vec{y})\times(-\vec{x})) \\ &= (y_0x_0 - \vec{y}\cdot\vec{x}) + (-y_0\vec{x} - x_0\vec{y} + \vec{y}\times\vec{x}) \\ &= (x_0y_0 - \vec{x}\cdot\vec{y}) - (x_0\vec{y} + y_0\vec{x} + \vec{x}\times\vec{y}) \\ &= \overline{xy}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$ und $\vec{x}\times\vec{y} = -\vec{y}\times\vec{x}$ gelten. Weiter ist

$$\begin{aligned}x\overline{x} &= (x_0 + \vec{x})(x_0 - \vec{x}) \\ &= (x_0^2 - \vec{x}\cdot(-\vec{x})) + (x_0\vec{x} + x_0(-\vec{x}) + \vec{x}\times\vec{x}) \\ &= x_0^2 + \vec{x}\cdot\vec{x}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\vec{x}\times\vec{x} = 0$ gilt. Ebenso zeigt man $\overline{x}x = x_0^2 + \vec{x}\cdot\vec{x}$. (oder man verwendet Online-Aufgabe 2(a) aus der folgt $\overline{x}x = x\overline{x}$.)

(b) Wir haben

$$N(\overline{x}) = \overline{x}\,\overline{\overline{x}} = \overline{x}x = x\overline{x} = N(x).$$

gemäss Teil (a). Weiter gilt

$$N(xy) = xy\overline{xy} = xy\overline{y}\,\overline{x} = xN(y)\overline{x} = x\overline{x}N(y) = N(x)N(y).$$

Dabei haben wir verwendet, dass gilt $N(y)\overline{x} = \overline{x}N(y)$. (Gemäss (a) ist $N(y) \in \mathbb{R}$ und reelle Zahlen kommutieren mit Quaternionen.)

(c) Es ist

$$\begin{aligned}xy &= (x_0y_0 - \vec{x}\cdot\vec{y}) + (x_0\vec{y} + y_0\vec{x} + \vec{x}\times\vec{y}) \\ yx &= (y_0x_0 - \vec{y}\cdot\vec{x}) + (y_0\vec{x} + x_0\vec{y} + \vec{y}\times\vec{x})\end{aligned}$$

also $xy - yx = \vec{x}\times\vec{y} - \vec{y}\times\vec{x} = 2(\vec{x}\times\vec{y})$. Falls $x_0 = y_0 = 0$, dann ist

$$x\overline{y} = (0 + \vec{x})(0 - \vec{y}) = (-\vec{x}\cdot(-\vec{y})) + \vec{x}\times(-\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y} - \vec{x}\times\vec{y}.$$

Also $y\overline{x} = \overline{x\overline{y}} = \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{x}\times\vec{y}$, d.h. $x\overline{y} + y\overline{x} = 2(\vec{x}\cdot\vec{y})$.

(d) Wir betrachten Quaternionen $x = 0 + \vec{x}$, $y = 0 + \vec{y}$, $z = 0 + \vec{z}$. Gemäss (c) haben wir

$$(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z} = (\tfrac{1}{2}(xy - yx))\times\vec{z} = \tfrac{1}{4}(xyz - yxz - zxy + zyx).$$

Ebenso behandeln wir die anderen Vektorprodukte und erhalten

$$\begin{aligned}&(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z} + (\vec{y}\times\vec{z})\times\vec{x} + (\vec{z}\times\vec{x})\times\vec{y} \\ &= \tfrac{1}{4}(xyz - yxz - zxy + zyx) + \tfrac{1}{4}(yzx - zyx - xyz + xzy) + \tfrac{1}{4}(zxy - xzy - yzx + yxz) \\ &= 0.\end{aligned}$$

2) (a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für $x \in \mathbb{H}$, $q \in \mathbb{H}_1$ und $y = q\,x\,\overline{q}$ gilt $x_0 = y_0$. Dies bedeutet, dass für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ das Quaternion $r_q(\vec{x}) = q\,\vec{x}\,\overline{q}$ wieder von der Form $0 + \vec{y}$ ist, wir können also sagen $q\,\vec{x}\,\overline{q} \in \mathbb{R}^3$, die gegebene Abbildung r_q ist damit wohldefiniert.
Weiter haben wir $N(r_q(\vec{x})) = N(q)N(\vec{x})N(\overline{q}) = N(\vec{x})$. Nun haben wir für $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ die Beziehung $N(\vec{x}) = \vec{x}\cdot\vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\vec{x}|^2$. Es gilt also $|r_q(\vec{x})| = \sqrt{N(r_q(\vec{x}))} = \sqrt{N(\vec{x})} = |\vec{x}|$. Für alle $\vec{x}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt also $|r_q(\vec{x}) - r_q(\vec{w})| = |r_q(\vec{x} - \vec{w})| = |\vec{x} - \vec{w}|$, was bedeutet, dass r_q eine Isometrie ist. Dass diese Isometrie den Ursprung fixiert ist offensichtlich, es bleibt also zu zeigen,

dass r_q orientierungserhaltend ist. Unter Verwendung von $q\overline{q} = \overline{q}q = 1$ und der Tatsache, dass reelle Zahlen mit Quaternionen kommutieren zeigt man die Identitäten

$$r_q(\vec{x}) \cdot r_q(\vec{y}) = x \cdot y$$
$$r_q(\vec{x}) \times r_q(\vec{y}) = r_q(\vec{x} \times \vec{y})$$

Daraus folgt, dass $r_q(\vec{x}) \cdot (r_q(\vec{y}) \times r_q(\vec{z})) = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$. Insbesondere werden also positiv orientierte Tripel durch r_q auf positiv orientierte Tripel abgebildet.

(b) Es seien $q, s \in \mathbb{H}_1$ und $I = \Phi(qs) = r_{qs}$, $J = \Phi(q) \circ \Phi(s) = r_q \circ r_s$. Wir müssen zeigen, dass I und J die gleiche Isometrie von $\mathbb{R}^3$ sind. Sei also $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Es ist

$$J(\vec{x}) = (r_q \circ r_s)(\vec{x}) = r_q(r_s(\vec{x})) = r_q(s\,\vec{x}\,\overline{s}) = q\,s\,\vec{x}\,\overline{s}\,\overline{q} = qs\,\vec{x}\,\overline{qs} = r_{qs}(\overline{x}) = I(\vec{x}).$$

Der Kern von Φ besteht aus allen $q \in \mathbb{H}_1$ für die $\Phi(q) = r_q = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ gilt. Wir verwenden die aus der Vorlesung bekannte Tatsache, dass sich jedes $q \in \mathbb{H}_1$ schreiben lässt als

$$q = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}$$

für ein $\varphi \in [0, 2\pi]$ und einen Einheitsvektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$. Die zugehörige Isometrie r_q ist gerade die Rotation um den Winkel φ um die durch $\vec{n}$ definierte Achse. Diese Isometrie ist gleich der Identität, genau dann wenn der Rotationswinkel φ gleich 0 oder gleich 2π ist. Für $\varphi = 0$ erhalten wir $q = 1$, für $\varphi = 2\pi$ erhalten wir $q = -1$. Damit ist

$$\ker \Phi = \{\pm 1\}.$$

(c) Wir betrachten das Tetraeder Δ mit den Eckpunkten

$$A_1 = (-1, -1, -1)$$
$$A_2 = (-1, +1, +1)$$
$$A_3 = (+1, -1, +1)$$
$$A_4 = (+1, +1, -1)$$

Der Mittelpunkt dieses Tetraeders ist der Ursprung. Wir bestimmen zuerst die Gruppe $G \subset SO(3)$ der Isometrien welche Δ erhalten. Für einen Einheitsvektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ und einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ schreiben wir $R_{\vec{n},\varphi}$ für die Rotation um die durch $\vec{n}$ definierte Gerade um den Winkel φ. Für $1 \leq n \leq 4$ sei $\vec{a}_n$ der Einheitsvektor, welcher die Gerade beschreibt, die durch den Punkt A_n und die Mitte der gegenüberliegenden Seitenfläche von Δ läuft. Es gilt

$$R_{\vec{a}_n, 2\pi/3},\ R_{\vec{a}_n, 4\pi/3} \in G$$

für $1 \leq n \leq 4$ (dies ergibt 8 Elemente von G). Weiter sei $\vec{e_n}$ der n-te Einheitsvektor von $\mathbb{R}^3$. Es gilt

$$R_{\vec{e}_n, \pi} \in G$$

für $1 \leq n \leq 3$ (dies ergibt 3 Elemente von G). Dies sind nämlich gerade die orientierungserhaltenden Isometrien, welche ein Paar von Ecken von Δ mit dem gegenüberliegenden Paar von Ecken vertauschen. Zusammen mit der Identität haben wir nun 12 Elemente von G gefunden. Tatsächlich haben wir damit ganz G bestimmt, denn: Jede Isometrie welche Δ erhält ist durch ihre Permutation der Eckpunkte $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ eindeutig bestimmt. Es gibt $|S_4| = 6! = 24$ solche Permutationen, von denen genau die Hälfte, also 12, orientierungserhaltend sind.
Es bleibt nun zu zeigen, dass gilt $\Phi^{-1}(G) = T$. Daraus folgt $\Phi(T) = G$ und dass T eine Untergruppe von $\mathbb{H}_1$ ist, denn Urbilder von Untergruppen sind Untergruppen. Unsere betrachteten Rotationen werden durch die Einheitsquaternionen

$$q_{n,\varphi} := \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\vec{a_n}, \qquad 1 \leq n \leq 4,\ \varphi \in \{2\pi/3, 4\pi/3\}$$

und

$$s_n := \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\vec{e}_n, \qquad 1 \leq n \leq 3$$

beschrieben. Wegen $\ker \Phi = \{\pm 1\}$ werden die gleichen Rotationen aber auch durch $-q_{n,\varphi}$ und $-s_n$ beschrieben, genauer gesagt:

$$\Phi^{-1}(R_{\vec{a}_n,\varphi}) = \{\pm q_{n,\varphi}\}, \quad \Phi^{-1}(R_{\vec{e}_n,\pi}) = \{\pm s_n\}, \quad \Phi^{-1}(\mathrm{id}) = \ker \Phi = \{\pm 1\}.$$

Man kann nachrechnen, dass die gegebene Menge T genau aus den Elementen $\pm q_{n,\varphi}$, $\pm s_n$ und ± 1 besteht, also $\Phi^{-1}(G) = T$.

3) Wir zeigen zuerst (i)$\Leftrightarrow$(ii). Es gilt

$$\begin{aligned} & (x-\overline{x}^2)(x-1) = (\overline{x}-1)(\overline{x}-x^2) \\ \iff & -x - x\overline{x}^2 = -\overline{x} - \overline{x}x^2 \\ \iff & (x-\overline{x})(x\overline{x}-1) = 0 \\ \iff & x = \overline{x} \text{ oder } x\overline{x} = 1 \\ \iff & x \in \mathbb{R} \text{ oder } N(x) = 1 \end{aligned}$$

Um (ii)$\Leftrightarrow$(iii) zu zeigen, schreibe $u = x - \overline{x}^2$ und $v = x - 1$. Die Gleichung (ii) lautet dann $uv = \overline{uv}$. Wir haben die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} & uv = \overline{uv} \\ \iff & uv \in \mathbb{R} \\ \iff & \exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha v = \overline{u} \\ \iff & \exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha(x-1) = \overline{x} - x^2 \\ \iff & \exists \alpha \in \mathbb{R} : N(x) = x^3 + \alpha x^2 - \alpha x \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Gleichung mit x multipliziert. Beachte, dass dies auch für $x = 0$ eine Äquivalenzumformung ist, denn für $x = 0$ gelten die beiden letzten Aussagen mit $\alpha = 0$.

Lösungen der Online-Aufgaben

1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Es existieren $x, y \in \mathbb{H}$ für die gilt $xy - yx = 1$.

Für $x = x_0 + \vec{x}$ schreibe $\mathrm{Re}(x) = x_0$ für den Realteil von x. Man sieht leicht, dass $\mathrm{Re}(xy) = \mathrm{Re}(yx)$ und $\mathrm{Re}(x+y) = \mathrm{Re}(x) + \mathrm{Re}(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{H}$ gelten. Wenn wir also den Realteil der gegebenen Gleichung nehmen, dann erhalten wir den Widerspruch $0 = 1$.

√ (b) Es existieren $x, y \in \mathbb{H}$ für die gilt $xy - yx \in \mathbb{R}$.

Wähle $x = y$.

2. Es seien $x, y \in \mathbb{H}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) Falls gilt $xy \in \mathbb{R}$, dann ist $xy = yx$.

Sei $xy = \lambda \in \mathbb{R}$. Falls $x = 0$, dann ist die Behauptung offensichtlich wahr. Andernfalls haben wir $y = x^{-1}\lambda = \lambda x^{-1}$, also $yx = \lambda x^{-1} x = \lambda = xy$.

(b) Falls gilt $xy = yx$, dann ist entweder $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $xy \in \mathbb{R}$ oder $xy^{-1} \in \mathbb{R}$.

Gegenbeispiel: $x = i$, $y = 1 + i$. Tatsächlich kommutieren alle Quaternionen der Form $a + bi$ (genauer: $a + bi + 0j + 0k$) miteinander, denn dies sind gerade die komplexen Zahlen.

3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Falls $x^2 = 1$ für $x \in \mathbb{H}$, dann ist $x = 1$ oder $x = -1$.

(b) Die Gleichung $x^2 = 1$ hat genau 8 Lösungen $x \in \mathbb{H}$.

(c) Die Gleichung $x^2 = 1$ hat unendlich viele Lösungen $x \in \mathbb{H}$.

(d) Falls $x^2 = -1$ für $x \in \mathbb{H}$ dann ist $x \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}$.

√ (e) Die Gleichung $x^2 = -1$ hat unendlich viele Lösungen $x \in \mathbb{H}$.

Wenn $x^2 = \pm 1$ dann gilt $N(x^2) = N(\pm 1)$, also $N(x)^2 = 1$, also $N(x) = 1$ (denn $N(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{H}$). D.h. x ist ein Einheitsquaternion und wir können schreiben $x = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}$ für ein $\varphi \in [0, 2\pi]$ und einen Einheitsvektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$. Es gilt dann $x^2 = \cos\varphi + \sin\varphi\,\vec{n}$.
Falls $x^2 = 1$, dann ist also $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = 0$, also $\varphi \in \{0, 2\pi\}$, also $x = \pm 1$.
Falls $x^2 = -1$, dann ist $\cos\varphi = -1$ und $\sin\varphi = 0$, also $\varphi = \pi$. Daraus folgt, dass $x = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\vec{n} = 0 + \vec{n}$, und tatsächlich gilt für $x^2 = -1$ für solche x. Das heisst, die Gleichung $x^2 = -1$ hat die unendliche Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{H}_1 \mid x_0 = 0\}$.

4. Es sei $q \in \mathbb{H}_1$ gegeben durch $q = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}j + \frac{\sqrt{2}}{4}k$. Wir schreiben r_q für die zu q gehörige Isometrie von $\mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) r_q ist eine Spiegelung an der Ebene $2\sqrt{3}x_1 - \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3 = 0$.

$\checkmark$ (b) r_q fixiert den Punkt $(0, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$.

$\checkmark$ (c) r_q ist eine Rotation.

(d) r_q ist eine Rotation um den Winkel $-\pi/6$.

$\checkmark$ (e) Es gilt $(r_q)^6 = \mathrm{id}$.

$\checkmark$ (f) r_q ist eine Rotation um die Achse gegeben durch den Vektor $(0, -1, 1)$.

Es ist $q = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}$ für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ und $\vec{n} = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Das heisst, r_q ist eine Rotation um den Winkel $\pi/3$ um die Achse gegeben durch den Vektor $(0, -1, 1)$ (oder ein beliebiges Vielfaches dieses Vektors).