Lösungen 5

1) (a) Es sei $x \in \mathbb{H}$ gegeben, $x = x_0 + \vec{x}$. Wir wählen einen Vektor $\vec{v} \neq 0$, so dass gilt $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$. Das Produkt $x\vec{v}$ ist dann gleich $q_0\vec{v} + \vec{q} \times \vec{v}$. Dies ist wiederum ein Vektor, den wir $\vec{u}$ nennen. Es gilt also $x\vec{v} = \vec{u}$, oder gleichbedeutend, $x = \vec{u}\vec{v}^{\,-1}$.

(b) Wir nehmen zuerst an, dass die gegebene Gleichung $\vec{u}\vec{v}^{\,-1} = \vec{w}\vec{z}^{\,-1}$ gilt und zeigen, dass eine Drehung r mit den geforderten Eigenschaften existiert. Für jedes Quaternion $q \in \mathbb{H}$ ist $q^{-1} = \frac{1}{N(q)}\overline{q}$. Für einen Vektor $\vec{x}$ lautet diese Gleichung $\vec{x}^{\,-1} = -\frac{1}{|\vec{x}|^2}\vec{x}$. Damit erhalten wir

$$\vec{u}\vec{v}^{\,-1} = -\frac{1}{|\vec{v}|^2}\vec{u}\vec{v} = -\frac{1}{|\vec{v}|^2}(-\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}) = \frac{1}{|\vec{v}|^2}(\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \times \vec{v})$$

Die gegebene Gleichung $\vec{u}\vec{v}^{\,-1} = \vec{w}\vec{z}^{\,-1}$ ist also gleichbedeutend mit

$$\frac{1}{|\vec{v}|^2}(\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \times \vec{v}) = \frac{1}{|\vec{z}|^2}(\vec{w} \cdot \vec{z} - \vec{w} \times \vec{z}). \tag{1}$$

Es sei α der Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$, und β der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{z}$. Es gelten

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha \\ \vec{z} \cdot \vec{w} &= |\vec{z}||\vec{w}| \cos\beta\end{aligned}$$

Aus (1) folgt durch Vergleich der Realteile

$$\frac{1}{|\vec{v}|^2}\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{|\vec{z}|^2}\vec{w} \cdot \vec{z}$$

also

$$\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\cos\alpha = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{z}|}\cos\beta.$$

Aus der Gleichung in der Aufgabenstellung erhalten wir

$$\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{z}|}, \tag{2}$$

also ergibt sich $\cos\alpha = \cos\beta$ und damit $\alpha = \beta$. Vergleichen wir die Vektoranteile von (1), so erhalten wir

$$\frac{1}{|\vec{v}|^2}\vec{u} \times \vec{v} = \frac{1}{|\vec{z}|^2}\vec{w} \times \vec{z}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ in einer gemeinsamen Ebene liegen, nämlich in der Ebene, die senkrecht auf $\vec{u} \times \vec{v}$ (oder gleichbedeutend $\vec{w} \times \vec{z}$) steht. Es sei r die Drehung um die Achse $\vec{u} \times \vec{v}$, für die $r(\vec{w})$ parallel zu (d.h. ein vielfaches von) $\vec{u}$ ist. Für $\lambda = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{w}|} = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{z}|}$ gilt nun $\lambda\, r(\vec{w}) = \vec{u}$. Weil die Paare $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}, \vec{z}$ denselben Winkel einschliessen gilt auch $\lambda\, r(\vec{z}) = \vec{v}$.
Um die Umkehrung zu zeigen, nehmen wir an dass $\vec{u} = \lambda\, r(\vec{w})$, $\vec{v} = \lambda\, r(\vec{z})$. Es gelten

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \lambda^2\, r(\vec{w}) \cdot r(\vec{z}) = \lambda^2\, \vec{w} \cdot \vec{z} \\ \vec{u} \times \vec{v} &= \lambda^2\, r(\vec{w}) \times r(\vec{z}) = \lambda^2\, \vec{w} \times \vec{z}. \\ |\vec{v}| &= \lambda\, |\vec{z}|\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{|\vec{v}|^2}(\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \times \vec{v}) = \frac{1}{\lambda^2|\vec{z}|^2}(\lambda^2\, \vec{w} \cdot \vec{z} - \lambda^2\, \vec{w} \times \vec{z}) = \frac{1}{|\vec{z}|^2}(\vec{w} \cdot \vec{z} - \vec{w} \times \vec{z}).$$

und dies ist gerade die Gleichung (1), welche äquivalent ist zu $\vec{u}\vec{v}^{\,-1} = \vec{w}\vec{z}^{\,-1}$.

2) Definiere $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$F(x) = \begin{cases} |x| f\left(\dfrac{x}{|x|}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Für $x \in S^2$ gilt $F(x) = f(x)$. Um zu zeigen, dass F eine Isometrie ist, müssen wir zeigen, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt $|F(x) - F(y)| = |x - y|$. Für $x = y = 0$ ist dies offensichtlich. Weiter ist für $x \neq 0$

$$|F(x) - F(0)| = |F(x)| = |x||f(x/|x|)| = |x| = |x - 0|,$$

daher können wir annehmen, dass $x, y \neq 0$. Aus der Gleichung $|a|^2 = a \cdot a$ folgt

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)|^2 &= |F(x)|^2 + |F(y)|^2 - 2\,F(x) \cdot F(y) \\ &= |x|^2 + |y|^2 - 2\,F(x) \cdot F(y) \\ &= |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\,f(x/|x|) \cdot f(y/|y|) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Tatsache, dass f eine Isometrie ist: Für $a, b \in S^2$ erhält f den sphärischen Abstand von a und b, also ist der Winkel zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gleich dem Winkel zwischen a und b. Insbesondere wird auch der Cosinus des Winkels erhalten. Also ist $f(a) \cdot f(b) = a \cdot b$, denn das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren ist gleich dem Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren. Für unsere Gleichung oben bedeutet dies, dass $f(x/|x|) \cdot f(y/|y|) = x/|x| \cdot y/|y|$, also

$$\begin{aligned} \ldots &= |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\,x/|x| \cdot y/|y| \\ &= |x|^2 + |y|^2 - 2\,x \cdot y \\ &= |x - y|^2. \end{aligned}$$

Nun können wir die Quadratwurzel ziehen und die Behauptung folgt.

3) (a) Falls $n = 2$ dann haben wir ein Zweieck mit antipodalen Eckpunkten und zwei gleichen Innenwinkeln α. Ein solches Zweieck bedeckt genau den Anteil $\alpha/2\pi$ der Sphäre, hat also den Flächeninhalt $\alpha/2\pi \cdot 4\pi = 2\alpha$, und man sieht, dass die Behauptung in diesem Fall stimmt Für $n \geq 3$ zerlegen wir das n-Eck entlang von Diagonalen in $n - 2$ Dreiecke $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-2}$. Es seien A_i die Flächeninhalte und I_i die Innenwinkelsummen dieser Dreiecke, $1 \leq i \leq n - 2$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $I_i = \pi + A_i$, also gilt

$$I = I_1 + \cdots + I_{n-2} = (\pi + A_1) + \cdots + (\pi + A_{n-2}) = (n - 2)\pi + A.$$

(b) Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ ein konvexes Polyeder. Wir verschieben und verkleinern $\mathcal{P}$ so, dass $\mathcal{P}$ in der Einheitskugel enthalten ist und der Ursprung 0 im Innern von $\mathcal{P}$ liegt. Dies verändert die Werte von E, K, F nicht. Nun projizieren wir die Kanten von $\mathcal{P}$ vom Ursprung aus radial auf die Einheitssphäre. Dies ergibt eine Zerlegung der Sphäre in F (sphärische) Polygone $X_1, \ldots, X_F$ (siehe zum Beispiel die Darstellung in Aufgabe 4 dieser Serie). Beachte, dass die Anzahl Ecken, Kanten und Flächen in dieser Zerlegung immer noch gleich E, K, F sind. Für das Polygon X_i sei n_i die Anzahl der Ecken, I_i die Innenwinkelsumme und A_i der Flächeninhalt. Wir bestimmen die Summen dieser Werte:

- Es gilt $\sum_{i=1}^F I_i = 2\pi E$, denn in jedem Eckpunkt (auf der Sphäre) ist die Summe der angrenzenden Winkel gleich 2π und es gibt genau E solche Punkte.
- Es gilt $\sum_{i=1}^F n_i = 2K$, denn n_i ist auch gleich der Anzahl Kanten von X_i, weil aber jede Kante zu zwei Polygonen gehört zählen wir die Kanten mit der Summe doppelt.
- Es gilt $\sum_{i=1}^F A_i = 4\pi$, denn dies ist der Flächeninhalt der ganzen Sphäre.

Mit der Gleichung $I_i = (n_i - 2)\pi + A_i$ aus Teil (a) folgt

$$2\pi E = \sum_{i=1}^F I_i = \sum_{i=1}^F (n_i - 2)\pi + \sum_{i=1}^F A_i = 2K\pi - 2F\pi + 4\pi$$

Diese Gleichung teilen wir durch 2π und stellen um, es ergibt sich die Polyederformel.

4) (a) Es seien F die Anzahl der Flächen in einer Pflasterung mit regelmässigen Fünfecken, und es sei n die Anzahl der Fünfecke die in jedem Eckpunkt zusammenstossen. Die Innenwinkel der Fünfecke sind also gleich $2\pi/n$, die Innenwinkelsumme gleich $10\pi/n$. Weiter ist die Fläche jedes Fünfeckes gleich $4\pi/F$. Die Gleichung aus 3(a) besagt also

$$\frac{10\pi}{n} = 3\pi + \frac{4\pi}{F}.$$

Umstellen nach F ergibt

$$F = \frac{4n}{10 - 3n}$$

Alternativ kann man diese Gleichung auch aus der Eulerschen Polyederformel herleiten. Die einzigen Lösungen in den natürlichen Zahlen sind $F = 2$ und $n = 2$ oder $F = 12$ und $n = 3$. Für eine Pflasterung muss (gemäss Aufgabenstellung) gelten $n \geq 3$. Es ist also zwangsläufig $F = 12$, wie behauptet.

(b) Weil je 3 Fünfecke an einem Eckpunkt zusammentreffen sind die Innenwinkel gleich $2\pi/3$. Weil die Fläche der gesamten Sphäre gleich 4π ist, hat jedes Fünfeck die Fläche $4\pi/12 = \pi/3$. Um die Seitenlänge s zu bestimmen betrachten wir ein gleichschenkliges (sphärisches) Dreieck welches als Basis eine Kante eines Fünfecks hat und als Spitze den Mittelpunkt dieses Fünfecks. Die Winkel an der Basis sind gleich $\pi/3$, an der Spitze gleich $2\pi/5$. Der sphärische Cosinussatz besagt

$$\cos\frac{2\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\cos s$$

Daraus erhält man

$$s = \arccos\frac{\sqrt{5}}{3} = 0.729...$$

(c) Betrachte die zur gegebenen Zerlegung *duale* Zerlegung. Diese hat als Eckpunkte die Mittelpunkte der gegebenen Fünfecke, und zwei solche Eckpunkte werden durch eine Kante (d.h. einen Grosskreisbogen) verbunden, genau dann wenn die umgebenden Fünfecke benachbart sind. Weil die gegebene Zerlegung 20 Eckpunkte hat, hat die neue Zerlegung 20 Flächen. Weil in der gegebenen Zerlegung je drei Fünfecke in einem Eckpunkt zusammenstossen, besteht die neue Zerlegung aus (gleichseitigen) Dreiecken. Wir sehen hier die Dualität zwischen den platonischen Körpern *Dodekaeder* (12-Flächner) und *Ikosaeder* (20-Flächner).

5) Es seien S_A, S_B, S_N die Grosskreise durch A und C, B und C, und N und C. Es sei C' der Punkt, welcher C auf der Sphäre gegenüber liegt. Die Grosskreise S_A, S_B und S_C laufen alle durch C. Ausserdem gilt für je zwei Grosskreisen durch C, dass ihr Schnittwinkel bei C gleich ihrem Schnittwinkel bei C' ist. Das heisst, $\measuredangle(A, C, N) = \measuredangle(A, C', N)$. Nun drehen wir die Sphäre um den Winkel π um den Durchmesser welcher durch N läuft. Die Grosskreise durch N werden dadurch erhalten, und C wird mit C' vertauscht (denn diese Punkte liegen auf dem Äquator). Ausserdem wird A mit B vertauscht (denn diese Punkte haben denselben Abstand von N). S_A wird auf einen anderen Grosskreis durch C und C' abgebildet, weil aber A auf B abgebildet wird ist es der Grosskreis S_B. Es ist also $\measuredangle(A, C', N) = \measuredangle(B, C, N)$ (denn der eine Winkel geht durch Rotation aus dem anderen hervor), und es folgt $\measuredangle(A, C, N) = \measuredangle(B, C, N)$.
(Dies ist die Aufgabe 2 der amerikanischen Mathematikolympiade USAMO 1979).

Lösungen der Online-Aufgaben

1. Wir betrachten ein sphärisches Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und zugehörigen Winkeln $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$. Dabei liegt der Winkel α der Seite a gegenüber etc. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

√ (a) Das Dreieck ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt durch a, b, c.

√ (b) Das Dreieck ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt durch α, β, γ.

(c) Das Dreieck ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt durch b, c, β.

√ (d) Falls $\gamma = \pi/2$, dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks eindeutig bestimmt durch a, b.

Eine Diskussion der Behauptungen (a),(b) und (c) findet man unter
`http://en.wikipedia.org/wiki/Solving_triangles#Solving_spherical_triangles`
Die Aussage (d) ist korrekt, denn der sphärische Cosinussatz für unser rechtwinkliges Dreieck lautet $\cos c = \cos a \cos b$. Damit ist die Seite c eindeutig bestimmt, also kennen wir alle drei Seiten, damit auch die Winkel (gemäss (a)), und damit auch den Flächeninhalt des Dreiecks.

2. Es sei $I = \sum_{i=1}^{7} \alpha_i$ die Innenwinkelsumme eines sphärischen 7-Ecks, wobei $0 < \alpha_i \leq \pi$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) I kann beliebig klein sein.

(b) I kann beliebig gross sein.

√ (c) Es gilt $I \geq 5\pi$.

(d) Es gilt $I = 5\pi$.

(e) Es gilt $I \leq 6\pi$.

Gemäss Aufgabe 3(a) dieser Serie gilt $I = 5\pi + A$, wobei A der Flächeninhalt des 7-Ecks ist. Weil $A \geq 0$ folgt daraus $I \geq 5\pi$. I kann also nicht beliebig klein sein. Gleichheit gilt nur, wenn $A = 0$, also wenn das 7-Eck degeneriert ist, was wegen $\alpha_i > 0$ nicht der Fall ist. I kann aber auch nicht beliebig gross sein: Es gilt $A \leq 4\pi$ (Flächeninhalt der Sphäre), also $I \leq 9\pi$. (NB: Dies ist eine grobe Abschätzung, mann kann sich überlegen, dass das 7-Eck wegen $\alpha_i \leq \pi$ in einer Hemisphäre enthalten ist, also $A \leq 2\pi$.) Um ein Beispiel mit $I > 6\pi$ zu erhalten, betrachten wir ein 7-Eck mit Eckpunkten auf einem Grosskreis, also mit $\alpha_i = \pi$ für alle i. In diesem Fall haben wir $I = 7\pi$.