Lösungen 6

1) (a) Der hyperbolische Kreis mit Radius r und Mittelpunkt i ist die Menge aller Punkte $z \in H$ mit $\delta(z,i) = r$, also

$$\operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{|z-i|^2}{2\operatorname{Im}(z)}\right) = r.$$

Wir wenden Äquivalenzumformungen auf diese Gleichung an:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{|z-i|^2}{2\operatorname{Im}(z)} &= \cosh r \\
\frac{(z-i)(\overline{z}+i)}{-i(z-\overline{z})} &= \cosh r - 1 \\
\frac{z\,\overline{z} + i(z-\overline{z}) + 1}{-i(z-\overline{z})} &= \cosh r - 1 \\
\frac{z\,\overline{z} + 1}{-i(z-\overline{z})} &= \cosh r \\
z\,\overline{z} + i(z-\overline{z})\cosh r &= -1 \\
z\,\overline{z} + i(z-\overline{z})\cosh r &= \sinh^2 r - \cosh^2 r \\
(z - i\cosh r)(\overline{z} + i\cosh r) &= \sinh^2 r \\
|z - i\cosh r|^2 &= \sinh^2 r \\
|z - i\cosh r| &= \sinh r
\end{aligned}$$

Das heisst, der betrachtete Kreis ist auch der euklidische Kreis mit Radius $\sinh r$ und Mittelpunkt $i\cosh r$. (NB: Tatsächlich sind alle hyperbolische Kreise auch euklidische Kreise, unabhängig vom Mittelpunkt. Dies folgt daraus, dass Möbiustransformationen euklidische Kreise auf euklidische Kreise abbilden.)

(b) Idee: Wir bestimmen eine Isometrie $\varphi \neq \mathrm{id}$ von H mit $\varphi(i) = i$ und $\varphi^3 = \mathrm{id}$. Eine solche Isometrie erhält den Kreis K und wir erhalten die gesuchten Eckpunkte als $z_2 = \varphi(z_1)$, $z_3 = \varphi^2(z_1)$.
Wir wissen, dass die Matrizen in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ welche als Möbiustransformationen den Punkt i fixieren die Untergruppe $\mathrm{SO}(2)$ bilden. Diese Gruppe kennen wir als Gruppe der Rotationen um einen Punkt der euklidischen Ebene. Die Matrix $R_\alpha \in \mathrm{SO}(2)$ welche der Rotation um den Winkel α entspricht ist gegeben durch

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Wir bezeichnen die durch R_α bestimmte Isometrie (Möbiustransformation) von H mit φ_α. Es gilt $(R_{2\pi/3})^3 = \mathbf{1}$ (Einheitsmatrix). Also gilt $(\varphi_{2\pi/3})^3 = \mathrm{id}$ für die zugehörige Isometrie. Weiter gilt $\varphi_{2\pi/3} \neq \mathrm{id}$, denn nur die Matrizen $\pm\mathbf{1}$ beschreiben die Identität. Damit erhalten wir die gesuchten Eckpunkte

$$z_2 = \varphi_{2\pi/3}(z_1), \quad z_3 = (\varphi_{2\pi/3})^2(z_1).$$

und damit

$$z_2 = \varphi_{2\pi/3}(2i) = \frac{\cos(2\pi/3)\cdot 2i - \sin(2\pi/3)}{\sin(2\pi/3)\cdot 2i + \cos(2\pi/3)} = -\frac{3\sqrt{3}}{13} + \frac{8}{13}i,$$

$$z_3 = (\varphi_{2\pi/3})^2(2i) = \varphi_{4\pi/3}(2i) = \frac{\cos(4\pi/3)\cdot 2i - \sin(4\pi/3)}{\sin(4\pi/3)\cdot 2i + \cos(4\pi/3)} = \frac{3\sqrt{3}}{13} + \frac{8}{13}i.$$

2) (a) Es ist

$$\varphi(z) = \frac{2z+1-2}{2z+1} = \frac{2z-1}{2z+1} = \frac{z-1/2}{z+1/2},$$

d.h. φ ist die Möbiustransformation die zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

gehört, also ist φ eine orientierungserhaltende Isometrie.

(b) Wir parametrisieren $\ell = \{\lambda i \,|\, \lambda > 0\}$. Wir wissen, dass die Bildgerade $\varphi(\ell)$ entweder eine euklidische Halbgerade oder ein Halbkreis senkrecht auf die reelle Achse ist. Wir untersuchen das Verhalten von $\varphi(\lambda i)$ wenn $\lambda \to 0$ oder $\lambda \to \infty$: Es gilt

$$\lim_{\lambda\to 0} \varphi(\lambda i) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda i - 1/2}{\lambda i + 1/2} = -1$$

$$\lim_{\lambda\to \infty} \varphi(\lambda i) = \lim_{\lambda\to \infty} \frac{\lambda i - 1/2}{\lambda i + 1/2} = 1$$

Das heisst, wir landen bei ± 1 wenn wir uns auf der Bildgeraden Richtung unendlich bewegen. Es folgt, dass $\varphi(\ell)$ der Halbkreis ist, welcher die reelle Achse bei ± 1 senkrecht trifft

(c) Wir bezeichnen die gegebene Abbildung mit σ, sie hat die folgenden Eigenschaften:

- σ ist eine Isometrie (denn $\delta(\sigma(z), \sigma(w)) = \delta(z, w)$ für alle $z, w \in H$),
- $\sigma^2 = \mathrm{id}$ (denn $\sigma(\sigma(z)) = z$ für alle $z \in H$),
- σ fixiert die Gerade ℓ punktweise (denn $\sigma(z) = z$ für alle $z \in \ell$),
- σ ist nicht orientierungserhaltend.

Damit ist σ die Spiegelung an der Geraden ℓ.

(d) Wir kennen bereits die Spiegelung σ an der Geraden ℓ und die Isometrie φ, welche ℓ auf $\varphi(\ell)$ abbildet. Daraus erhalten wir die Spiegelung ψ an der Geraden $\varphi(\ell)$ als $\psi = \varphi\sigma\varphi^{-1}$. (Dies sieht man z.B. indem man die Eigenschaften von (c) überprüft). Um eine explizite Darstellung zu erhalten verwenden wir

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{1/2\, z + 1/2}{-z + 1}$$

(wegen $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$) Also gilt

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \varphi(\sigma(\varphi^{-1}(z))) \\ &= \varphi(\sigma\left(\frac{1/2\, z + 1/2}{-z+1}\right)) \\ &= \varphi\left(\frac{-1/2\,\overline{z} - 1/2}{-\overline{z}+1}\right) \\ &= \frac{\dfrac{-1/2\,\overline{z} - 1/2}{-\overline{z}+1} - 1/2}{\dfrac{-1/2\,\overline{z} - 1/2}{-\overline{z}+1} + 1/2} \\ &= \frac{1}{\overline{z}}. \end{aligned}$$

(Diese Abbildung wird auch *Inversion am Einheitskreis* genannt.)