Lösungen zur Semesterendprüfung vom 10. Dezember 2013

1) (a) Die Behauptung ist falsch. Wenn n ungerade ist und $g \in \mathbb{D}_n$ eine Spiegelung, dann ist $g^n = g \neq e$.

(b) Die Gruppe $\mathbb{D}_3$ ist die Isometriegruppe eines regelmässigen Dreiecks Δ in der Ebene. Für jedes $g \in \mathbb{D}_3$ erhalten wir eine Permutation σ_g der Ecken von Δ und damit ein Element der symmetrischen Gruppe S_3. Wir haben also einen Homomorphismus $f : \mathbb{D}_3 \longrightarrow S_3$, $f(g) = \sigma_g$. Falls $f(g) = e$, dann fixiert g alle drei Ecken von Δ, das heisst $g = e$. Wir haben also $\ker f = \{e\}$, also ist f injektiv. Weil $|\mathbb{D}_3| = |S_3| = 6$ ist f auch surjektiv, also bijektiv, also ein Isomorphismus.

2) (a) Für einen Punkt Q der Ebene haben wir

$$\begin{aligned} & \rho(Q) = Q \\ \Longleftrightarrow \quad & (\psi\varphi\psi^{-1})(Q) = Q \\ \Longleftrightarrow \quad & (\varphi\psi^{-1})(Q) = \psi^{-1}(Q) \\ \Longleftrightarrow \quad & \varphi(\psi^{-1}(Q)) = \psi^{-1}(Q) \\ \Longleftrightarrow \quad & \psi^{-1}(Q) = P \\ \Longleftrightarrow \quad & Q = \psi(P) \end{aligned}$$

Das heisst, ρ hat genau einen Fixpunkt $\psi(P)$. Aus der Klassifikation der Isometrien der Ebene folgt, dass ρ eine Rotation ist.

(b) Wir wissen aus der Vorlesung, dass es für die Elemente einer endlichen Gruppe von Isometrien der Ebene einen *gemeinsamen* Fixpunkt gibt. Damit die Isometrien φ und ψ einen gemeinsamen Fixpunkt haben, muss P auf der Gerade ℓ liegen.

3) (a) Falls $a \neq 0$, schreibe $a = |a|e^{i\alpha}$. Es gilt dann $f(0) = f(\frac{1}{|a|}e^{-i\alpha/3}) = b$, also ist f nicht injektiv und somit keine Isometrie. Sei also $a = 0$, d.h. $f(z) = -\overline{z} + b$. Es gilt

$$|f(z) - f(w)| = |-\overline{z} - (-\overline{w})| = |\overline{z} - \overline{w}| = |\overline{z - w}| = |z - w|.$$

Das heisst, f ist eine Isometrie genau dann wenn $a = 0$ (Der Parameter b kann beliebig gewählt werden).

(b) Sei f eine Isometrie, also $f(z) = -\overline{z} + b$ für ein $b \in \mathbb{C}$. Weil die Abbildung $z \mapsto -\overline{z}$ nicht orientierungserhaltend ist (Spiegelung an der imaginären Achse), ist auch für jedes $b \in \mathbb{C}$ die Abbildung $z \mapsto -\overline{z} + b$ nicht orientierungserhaltend (Komposition einer Translation mit einer Spiegelung). D.h. es gibt keine Parameter a, b für die f eine orientierungserhaltende Isometrie ist.

(c) Sei f eine Isometrie, also $f(z) = -\overline{z} + b$ für ein $b \in \mathbb{C}$. Falls z ein Fixpunkt von f ist dann gilt $f(z) = z \Longrightarrow b = z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, also ist $b \in \mathbb{R}$. Umgekehrt gilt $f(b/2) = b/2$ falls $b \in \mathbb{R}$. D.h. f ist eine Isometrie mit Fixpunkt, genau dann wenn $a = 0$ und $b \in \mathbb{R}$.

4) Für $0 \neq q \in \mathbb{H}$ gilt $q\overline{q} = N(q)$, also $q^{-1} = \frac{1}{N(q)}\overline{q}$. Insbesondere haben wir $\vec{v}^{\,-1} = \frac{1}{N(\vec{v})}(-\vec{v}) = -\frac{1}{|\vec{v}^2|}\vec{v}$. Damit ergibt sich

$$\vec{u}\vec{v}^{\,-1} = -\frac{1}{|\vec{v}^2|}\vec{u}\vec{v} = -\frac{1}{|\vec{v}|^2}(-\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v})$$

Wir haben $|\vec{v}|^2 = 3$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ und $\vec{u} \times \vec{v} = (0, 1, -1)$, also

$$\begin{aligned} \vec{u}\vec{v}^{\,-1} &= -\tfrac{1}{3}(1 + (0, 1, -1)) \\ &= -\tfrac{1}{3} + (0, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}). \end{aligned}$$

5) (a) Die Gerade ist der Halbkreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $\sqrt{2}$

$$\{z \in H \mid |z| = \sqrt{2}\}.$$

(b) Die Punkte z_1 und z_2 haben den gleichen Abstand von der Geraden $\{z \in H \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$. Wegen dieser Symmetrie liegt der gesuchte Punkt w auf dieser Gerade, also $w = \lambda i$ für ein $\lambda > 0$. Für die Seitenlänge $s = \delta(z_1, z_2)$ des Dreiecks gilt

$$\cosh s = 1 + \frac{|1 + i - (-1 + i)|^2}{2\,\mathrm{Im}(1 + i)\,\mathrm{Im}(-1 + i)} = 3$$

Wir müssen also λ so wählen, dass gilt $\cosh \delta(z_1, w) = 3$. Wegen der Symmetrie gilt dann auch $\cosh \delta(z_2, w) = 3$. Wir haben

$$\begin{aligned} \cosh \delta(z_1, w) &= \cosh \delta(1 + i, \lambda i) \\ &= 1 + \frac{|1 + i - \lambda i|^2}{2\,\mathrm{Im}(1 + i)\,\mathrm{Im}\lambda i} \\ &= 1 + \frac{1 + (1 - \lambda)^2}{2\lambda} \\ &= \frac{2 + \lambda^2}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Das heisst die Gleichung $\cosh \delta(z_1, w) = 3$ bedeutet

$$\begin{aligned} & \frac{2 + \lambda^2}{2\lambda} = 3 \\ \iff\quad & \lambda^2 - 6\lambda + 2 = 0 \\ \iff\quad & \lambda = (3 \pm \sqrt{7})i. \end{aligned}$$

Es gibt also zwei Lösungen für w, nämlich

$$w_1 = (3 + \sqrt{7})i, \qquad w_2 = (3 - \sqrt{7})i.$$

6)

		W	F
(a)	In der symmetrischen Gruppe S_n sind alle Untergruppen der Ordnung 2 konjugiert zueinander.		**X**
(b)	Die Diedergruppe $\mathbb{D}_n$ der Ordnung $2n$ hat eine abelsche Untergruppe der Ordnung n.	**X**	
(c)	Es existiert eine Teilmenge der Ebene, deren Isometriegruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.	**X**	
(d)	Es existiert eine Teilmenge der Ebene, deren Isometriegruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4 ist.		**X**
(e)	Jede Isometrie der Ebene mit zwei oder mehr Fixpunkten ist eine Spiegelung.		**X**
(f)	Die Verknüpfung von zwei Spiegelungen der Ebene ist eine Rotation.		**X**
(g)	Die Gruppe $O(2)$ hat genau eine Untergruppe der Ordnung 2013.	**X**	
(h)	Die Gruppe $O(2)$ hat keine Untergruppe der Ordnung 2014.		**X**
(i)	In jedem sphärischen Dreieck mit positivem Flächeninhalt gibt es einen Innenwinkel, der grösser als $\pi/3$ ist.	**X**	
(j)	Die Sphäre lässt sich mit regelmässigen Vierecken pflastern.	**X**	
(k)	Für Quaternionen $x \in \mathbb{H}$ und $y \in \mathbb{H}_1$ gilt $N(xy\overline{x}) = N(x)$.		**X**
(l)	Für die Spiegelung ψ in der hyperbolischen Ebene $H = \{z \in \mathbb{C} \,\vert\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ mit $\psi(2i) = i/2$ gilt $\psi(i) = i$.	**X**	

Begründungen: (a) Die Untergruppen $\{(1),(12)\}$ und $\{(1),(12)(34)\}$ von S_4 sind nicht konjugiert zueinander. (b) Die Untergruppe aller Drehungen in $\mathbb{D}_n$ ist abelsch und hat Ordnung n. (c) Ein regelmässiges Dreieck hat die Isometriegruppe $\mathbb{D}_3 \cong S_3$. (d) gem. der Klassifikation der endlichen Untergruppen von $O(2)$ (e) Die Identität ist keine Spiegelung. (f) Bei parallelen Achsen ist die Verknüpfung eine Translation (g) Genau die zyklische Gruppe C_{2013}, gem. der Klassifikation der endlichen Untergruppen von $O(2)$. (h) Die Diedergruppe $\mathbb{D}_{1007}$ hat Ordnung 2014. (i) Der Flächeninhalt ist $F = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, wenn $F > 0$ dann muss einer der Winkel grösser als $\pi/3$ sein. (j) Man projiziere einen Würfel auf die umgebende Sphäre (k) Es gilt $N(xy\overline{x}) = N(x)^2$ was im allgemeinen nicht gleich $N(x)$ ist. (l) Die Spiegelungsgerade enthält i, den hyperbolischen Mittelpunkt von $i/2$ und $2i$.