Geometrie
D-MATH

Herbstsemester 2013
Prof. Felder

Semesterendprüfung
10. Dezember 2013

Wichtige Hinweise

- Die Prüfung dauert 90 Minuten.
- Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben, die alle das gleiche Gewicht haben.
- Erlaubte Hilfsmittel:
  - Zusammenfassung der Vorlesung (10 Seiten handschriftlich oder 5 Seiten gedruckt in Schriftgrösse 12)
  - Wörterbuch für Fremdsprachige
- Sämtliche elektronischen Geräte, insbesondere Mobiltelefone, müssen vor Prüfungsbeginn ausgeschaltet und verstaut werden.
- Legen Sie Ihre Legi zur Kontrolle auf den Tisch.
- Schreiben Sie mit blauer oder schwarzer Tinte. Keinesfalls mit rot, grün oder mit Bleistift schreiben!
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt.
- Bei den Aufgaben 1 bis 5 müssen alle Antworten begründet werden. Bei der Aufgabe 6 sind keine Begründungen nötig.
- Die Aufgabe 6 können Sie direkt auf dem Aufgabenblatt durch Ankreuzen lösen.
- Geben Sie am Schluss das ausgefüllte Deckblatt, die Aufgabenblätter und Ihre Lösungen ab.

Viel Erfolg!

1) Es sei $\mathbb{D}_n$ die Diedergruppe der Ordnung $2n$. Wir bezeichnen das neutrale Element dieser Gruppe mit e.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: Für jedes $n \geq 2$ und jedes $g \in \mathbb{D}_n$ gilt $g^n = e$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{D}_3$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

2) Wir betrachten Isometrien φ und ψ der Ebene. Dabei ist φ die Rotation um einen Punkt P um den Winkel $\alpha \in (0, 2\pi)$, und ψ ist die Spiegelung an einer Gerade ℓ.

(a) Es sei $\rho = \psi\varphi\psi^{-1}$. Bestimmen Sie die Fixpunkte von ρ und entscheiden Sie, um welche Art von Isometrie es sich handelt.

(b) Wir nehmen an, dass φ und ψ in einer endlichen Gruppe von Isometrien der Ebene enthalten sind. Was können Sie in diesem Fall über P und ℓ sagen?

3) Für welche Parameter $a, b \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = az^2 - \overline{z} + b$$

(a) eine Isometrie?

(b) eine orientierungserhaltende Isometrie?

(c) eine Isometrie mit Fixpunkt?

4) Die Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, gegeben durch $\vec{u} = (-1, 0, 0)$ und $\vec{v} = (1, 1, 1)$, fassen wir als Quaternionen mit Realteil 0 auf. Berechnen Sie den Quotienten $x = \vec{u}\vec{v}^{-1}$. (Geben Sie das Resultat in der Form $x_0 + (x_1, x_2, x_3)$ an.)

5) Wir betrachten die obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ ausgestattet mit der hyperbolischen Metrik. Gegeben sind die Punkte $z_1 = -1 + i$ und $z_2 = 1 + i$.

(a) Beschreiben Sie die hyperbolische Gerade welche z_1 und z_2 enthält.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte $w \in H$ für welche w, z_1, z_2 die Eckpunkte eines regelmässigen hyperbolischen Dreiecks sind.

6) Bei dieser Aufgaben entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind. Sie müssen keine Begründung für Ihre Antworten angeben.

Hinweis zur Bewertung: Für jede Teilaufgabe erhalten Sie 1 Punkt wenn Ihre Antwort korrekt ist, -1 Punkt wenn Ihre Antwort falsch ist, oder 0 Punkte falls Sie keine Antwort geben. Ihre Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe ist mindestens 0.

		W	F
(a)	In der symmetrischen Gruppe S_n sind alle Untergruppen der Ordnung 2 konjugiert zueinander.		
(b)	Die Diedergruppe $\mathbb{D}_n$ der Ordnung $2n$ hat eine abelsche Untergruppe der Ordnung n.		
(c)	Es existiert eine Teilmenge der Ebene, deren Isometriegruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.		
(d)	Es existiert eine Teilmenge der Ebene, deren Isometriegruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4 ist.		
(e)	Jede Isometrie der Ebene mit zwei oder mehr Fixpunkten ist eine Spiegelung.		
(f)	Die Verknüpfung von zwei Spiegelungen der Ebene ist eine Rotation.		
(g)	Die Gruppe $O(2)$ hat genau eine Untergruppe der Ordnung 2013.		
(h)	Die Gruppe $O(2)$ hat keine Untergruppe der Ordnung 2014.		
(i)	In jedem sphärischen Dreieck mit positivem Flächeninhalt gibt es einen Innenwinkel, der grösser als $\pi/3$ ist.		
(j)	Die Sphäre lässt sich mit regelmässigen Vierecken pflastern.		
(k)	Für Quaternionen $x \in \mathbb{H}$ und $y \in \mathbb{H}_1$ gilt $N(xy\overline{x}) = N(x)$.		
(l)	Falls für eine Spiegelung ψ der hyperbolischen Ebene $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ gilt $\psi(2i) = i/2$, dann ist $\psi(i) = i$.		