Geometrie **Herbstsemester 2013**
D-MATH **Prof. Felder**

Serie 1

1) Es sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Falls für alle $g, h \in G$ die Gleichung $(gh)^2 = g^2h^2$ gilt, dann ist G abelsch.

(b) Wir nehmen an, dass G nicht-trivial und endlich ist. Zeigen Sie: Falls für alle $g \in G$ die Gleichung $g^{-1} = g$ gilt, dann ist G abelsch und die Ordnung $|G|$ ist gerade.

(c) Wir fixieren ein Element $a \in G$. Zeigen Sie, dass durch $g * h := gah$ eine weitere Gruppenverknüpfung auf der Menge G definiert wird.

2) Zeichnen Sie für $n = 2, 3, \infty$ je eine Teilmenge der Ebene, deren Isometriegruppe die Ordnung n hat.

3) Für eine Isometrie φ der Ebene nennen wir den Punkt P einen *Fixpunkt*, falls $\varphi(P) = P$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Es gibt keine Isometrie mit genau zwei Fixpunkten,

(b) Falls φ drei nicht-kollineare Fixpunkte hat, dann ist φ die Identität,

(c) Falls gilt $\varphi^3 = \mathrm{id}$, dann besitzt φ einen Fixpunkt.

(d) Beweisen oder widerlegen Sie: Falls φ einen Fixpunkt besitzt, dann gibt es ein $n > 0$ mit $\varphi^n = \mathrm{id}$.

4) Wir betrachten die Diedergruppe $\mathbb{D}_n$ der Ordnung $2n$, wobei $n \geq 2$.

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine natürliche Zahl $m > 0$ so dass für alle $g \in \mathbb{D}_n$ gilt: $g^m = 1$.

(b) Für welche n stimmt die folgende Aussage: Es gibt ein nicht-triviales $g \in \mathbb{D}_n$ so dass für jedes $h \in \mathbb{D}_n$ gilt $gh = hg$?

5) * Es sei φ eine Abbildung der Ebene auf sich selbst. Wir sagen, dass φ die Distanz $r > 0$ erhält, falls für alle Punkte P, Q gilt

$$d(P,Q) = r \quad \Longrightarrow \quad d(\varphi(P), \varphi(Q)) = r$$

Wir nehmen an, dass φ beliebig grosse und beliebig kleine Distanzen erhält. Das heisst, für jedes $t > 0$ gibt es ein $R > t$ und ein $0 < r < t$, so dass φ die Distanzen R und r erhält. Beweisen Sie, dass φ eine Isometrie ist.

Abgabe: Bis am 1. Oktober, im Fach des zugeteilten Assistenten im Raum HG J 68.

Sämtliche Informationen zur Vorlesung und den Übungen finden sie online unter `bit.ly/geometrie`

Online-Aufgaben

1. Es sei G eine Gruppe und $g, h \in G$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Aus $g^2 = h^2$ folgt $g = h$.

(b) Sei $n > 0$. Aus $h^n = 1$ folgt $(g^{-1}hg)^n = 1$.

(c) Für jedes $n > 0$ besitzt die Gleichung $x^n = g$ eine Lösung $x \in G$.

(d) Die Gleichung $g^{-1}xg = h$ besitzt genau eine Lösung $x \in G$.

2. Es seien φ und ψ Isometrien der Ebene. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Falls φ und ψ Translationen sind, dann ist auch $\varphi\psi$ eine Translation.

(b) Falls φ und ψ Geradenspiegelungen sind, dann gilt

$$\varphi\psi = \psi\varphi \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \psi.$$

(c) Falls φ und ψ Geradenspiegelungen sind, dann hat $\varphi\psi$ einen Fixpunkt.

(d) Jeder Fixpunkt von φ ist auch ein Fixpunkt von $\psi^{-1}\varphi\psi$.

(e) Falls φ einen Fixpunkt hat, dann hat auch $\psi^{-1}\varphi\psi$ einen Fixpunkt.