Serie 2

1) Es seien G, H Gruppen und $f : G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Das Bild $f(G) = \{f(g) \mid g \in G\}$ ist eine Untergruppe von H.

(b) Der *Kern* von f, definiert durch

$$\ker f := f^{-1}(\{e_H\}) = \{g \in G \mid f(g) = e_H\},$$

ist eine Untergruppe von G. (Dabei ist e_H das neutrale Element von H.)

(c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent

(i) f ist injektiv,

(ii) $\ker f = \{e_G\}$,

(iii) Es existiert ein $h \in H$ mit $|f^{-1}(\{h\})| = 1$.

(d) Falls f bijektiv ist, dann ist die Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls ein Homomorphismus. (In diesem Fall nennen wir f einen *Isomorphismus*, und falls ein Isomorphismus $G \longrightarrow H$ existiert dann sagen wir G und H sind *isomorph* zueinander.)

2) Es sei $\mathbb{D}_n$ die Diedergruppe der Ordnung $2n$ und S_n die symmetrische Gruppe auf n Elementen. Zeigen Sie, dass es für jedes $n \geq 3$ einen injektiven Homomorphismus $f_n : \mathbb{D}_n \longrightarrow S_n$ gibt. Für welche n ist f_n ein Isomorphismus?

3) Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Sei $g \in G$ und $n \geq 1$. Wir sagen g hat die *Ordnung* n, und schreiben $\operatorname{ord}(g) = n$, falls gilt $g^n = e$ und $g^m \neq e$ für alle $1 \leq m < n$. Falls kein solches n existiert, dann schreiben wir $\operatorname{ord}(g) = \infty$.

(a) Wir nehmen an, dass G endlich ist. Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ gilt: $\operatorname{ord}(g) < \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass es in der symmetrischen Gruppe S_n für jedes $1 \leq k \leq n$ ein Element $\sigma \in S_n$ gibt mit $\operatorname{ord}(\sigma) = k$.

4) Für $n \geq 3$ sei A_n ein regelmässiges n-Eck in der Ebene. Eine Diagonale in A_n ist ein Geradensegment, welches zwei nicht benachbarte Ecken verbindet. Wir schreiben D_n für die Menge der Diagonalen in A_n.

(a) Zeigen Sie, dass die Diedergruppe $\mathbb{D}_n$ der Ordnung $2n$ auf der Menge D_n operiert.

(b) Wieviele Bahnen hat diese Operation?

5) Es sei φ eine Isometrie der Ebene. Aus der Vorlesung wissen wir, dass φ eine Verknüpfung von höchstens 3 Spiegelungen ist. Zeigen Sie:

(a) Falls φ eine Verknüpfung von genau 3 Spiegelungen ist, dann ist φ keine Rotation.

(b) Falls φ eine Verknüfpung von genau 2 Spiegelungen ist, dann ist φ eine Rotation, dann und nur dann wenn φ einen Fixpunkt besitzt.

6) * Gibt es unter den vier Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ zwei die isomorph zueinander sind?

Abgabe: Bis am 15. Oktober, im Fach des zugeteilten Assistenten im Raum HG J 68.

Online-Aufgaben

1. Es sei G eine nicht-triviale Gruppe. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) G hat mindestens zwei verschiedene Untergruppen.

(b) Sind H_1, H_2 Untergruppen von G, so ist auch $H_1 \cap H_2$ eine Untergruppe von G.

(c) Sind H_1, H_2 Untergruppen von G, so ist auch $H_1 \cup H_2$ eine Untergruppe von G.

2. Es sei G eine Gruppe. Wir betrachten die Abbildung

$$I : G \longrightarrow G, \quad I(g) = g^{-1}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Falls G abelsch ist, dann ist die Abbildung I ein Homomorphismus.

(b) Falls G abelsch ist, dann ist die Abbildung I ein Isomorphismus.

(c) Falls I ein Isomorphismus ist, dann ist G abelsch.

3. Es sei G eine Gruppe. Für $h \in G$ betrachten wir die Abbildungen

$$c_h, l_h : G \longrightarrow G, \quad c_h(g) = h^{-1}gh, \quad l_h(g) = hg.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung c_h bijektiv.

(b) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung c_h ein Isomorphismus.

(c) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung l_h bijektiv.

(d) Für jedes $h \in G$ ist die Abbildung l_h ein Isomorphismus.