

Serie 3

- 1) (a) Bestimmen Sie alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_3 .
(b) Zeigen Sie: Sind zwei Untergruppen von S_3 isomorph, dann sind sie konjugiert zueinander.
(c) Finden Sie für jedes $n \geq 4$ zwei Untergruppen von S_n , die isomorph aber nicht konjugiert zueinander sind.
- 2) (a) Es seien H und H' Untergruppen von $O(2)$ mit je 15 Elementen. Zeigen Sie, dass H und H' konjugiert zueinander sind.
(b) Es sei $SO(2) \subseteq O(2)$ die Untergruppe, welche aus den orientierungserhaltenden Isometrien besteht. Bestimmen Sie bis auf Konjugation alle endlichen Untergruppen von $SO(2)$.
(c) Es sei φ die Rotation um den Winkel α um einen Punkt P der Ebene, und es sei ψ die Spiegelung an einer Geraden ℓ . Welche Bedingungen müssen P, α, ℓ erfüllen, damit es eine endliche Gruppe (von Isometrien der Ebene) gibt, welche φ und ψ enthält?

- 3) Bestimmen Sie alle Parameter $a, b, c \in \mathbb{C}$ für welche die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = az^2 + bz + c$$

eine Isometrie ist.

- 4) (a) Zeigen Sie, dass drei paarweise verschiedene Punkte $x, y, z \in \mathbb{C}$ kollinear sind, genau dann wenn gilt

$$\frac{x-y}{x-z} \in \mathbb{R}.$$

- (b) In einem ebenen Dreieck seien U der Umkreismittelpunkt, S der Schwerpunkt und H der Höhenschnittpunkt. Zeigen Sie, dass die Punkte U, S, H sind in jedem Dreieck kollinear sind. (Diesen Satz hat L. Euler im Jahr 1765 bewiesen. Man nennt die Gerade durch die betrachteten Punkte die *Eulersche Gerade* des Dreiecks.)

- 5) Es seien $x, y, z \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und es sei $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Zeigen Sie: Falls gilt

$$x + \zeta y + \zeta^2 z = 0,$$

dann sind x, y, z die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

- 6) * Es seien x, y, z paarweise verschiedene komplexe Zahlen für die gilt

$$(x-y)^7 + (y-z)^7 + (z-x)^7 = 0.$$

Zeigen Sie, dass x, y, z die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind.

Abgabe: Bis am 29. Oktober, im Fach des zugewiesenen Assistenten im Raum HG J 68.

Online-Aufgaben

1. Es seien H, H' zwei Untergruppen einer endlichen Gruppe G . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- (a) Falls H, H' isomorph sind dann sind sie konjugiert zueinander.
- (b) Falls H, H' konjugiert zueinander sind, dann gilt $|H| = |H'|$.
- (c) Falls gilt $|H| = |H'|$ dann sind sie konjugiert zueinander
- (d) Falls gilt $|H| = |H'|$ dann sind sie isomorph zueinander

2. Es seien H, H' zwei Untergruppen einer endlichen Gruppe G . Es gelte $|H| = |H'| = \frac{1}{2}|G|$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- (a) Falls H, H' isomorph sind, dann gilt $H = H'$.
- (b) Falls H, H' konjugiert zueinander sind, dann gilt $H = H'$.
- (c) In jedem Fall gilt $H = H'$.

3. Es seien $x, y, z \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden, so dass gilt

$$\frac{\overline{(x-y)}}{(x-y)} + \frac{\overline{(x-z)}}{(x-z)} = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- (a) x liegt auf der Strecke zwischen x und y .
- (b) $|x-y| = |x-z|$
- (c) Die Strecke zwischen x und y steht senkrecht auf die Strecke zwischen x und z .
- (d) Die Strecke zwischen x und y ist parallel zur Strecke zwischen x und z .