Geometrie **Herbstsemester 2013**
D-MATH **Prof. Felder**

Serie 5

1) (a) Zeigen Sie, dass jedes Quaternion als Quotient $\vec{u}\vec{v}^{-1}$ zweier Vektoren geschrieben werden kann.

(b) Seien $\vec{v}, \vec{z} \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\vec{u}\vec{v}^{-1} = \vec{w}\vec{z}^{-1}$ genau dann, wenn $\vec{u} = \lambda\, r(\vec{w})$, $\vec{v} = \lambda\, r(\vec{z})$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^*$ und eine Drehung r um eine zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrechte Achse.

2) Es sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre, ausgestattet mit der sphärischen Metrik. Zeigen Sie, dass jede Isometrie $f : S^2 \longrightarrow S^2$ die Einschränkung einer Isometrie $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist.

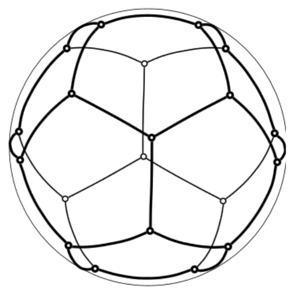
3) (a) In einem sphärischen n-Eck sei I die Innenwinkelsumme und A der Flächeninhalt. Zeigen Sie, dass gilt

$$I = (n-2)\pi + A.$$

(b) Verwenden Sie (a) um die *Eulersche Polyederformel* zu beweisen: Für jedes konvexe Polyeder im mit E Ecken, K Kanten und F Flächen gilt

$$E - K + F = 2.$$

4) Die folgende Abbildung zeigt eine Pflasterung der Sphäre mit 12 regelmässigen Fünfecken:



(a) Zeigen Sie, dass sich die Sphäre nicht mit einer anderen Anzahl von regelmässigen Fünfecken pflastern lässt (Wir verlangen, dass bei einer Pflasterung an jedem Eckpunkt mindestens 3 Polygone zusammentreffen).

(b) Bestimmen Sie Innenwinkel, Seitenlänge und Flächeninhalt der Fünfecke.

(c) Zeigen Sie, dass sich die Sphäre mit 20 gleichseitigen Dreiecken pflastern lässt.

5) * Auf der Sphäre sei N der Nordpol und es seien A, B Punkte auf einem Grosskreis durch N, so dass beide den gleichen Abstand von N haben. Weiter sei C ein Punkt auf dem Äquator. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\measuredangle(A, C, N) = \measuredangle(B, C, N).$$

Dabei steht $\measuredangle(X, Y, Z)$ für den Winkel beim Punkt Y im Dreieck X, Y, Z

Abgabe: Bis am 26. November, im Fach des zugeteilten Assistenten im Raum HG J 68.

Online-Aufgaben

1. Wir betrachten ein sphärisches Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und zugehörigen Winkeln $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$. Dabei liegt der Winkel α der Seite a gegenüber etc. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Das Dreieck ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt durch a, b, c.

(b) Das Dreieck ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt durch α, β, γ.

(c) Das Dreieck ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt durch b, c, β.

(d) Falls $\gamma = \pi/2$, dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks eindeutig bestimmt durch a, b.

2. Es sei $I = \sum_{i=1}^{7} \alpha_i$ die Innenwinkelsumme eines sphärischen 7-Ecks, wobei $0 < \alpha_i \leq \pi$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) I kann beliebig klein sein.

(b) I kann beliebig gross sein.

(c) Es gilt $I \geq 5\pi$.

(d) Es gilt $I = 5\pi$.

(e) Es gilt $I \leq 6\pi$.