Geometrie | **Herbstsemester 2013**
D-MATH | **Prof. Felder**

Serie 6

1) Wir betrachten die obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, ausgestattet mit der hyperbolischen Metrik δ. Der hyperbolische Kreis mit Mittelpunkt $z_0 \in H$ und Radius $r > 0$ ist gegeben durch

$$\{z \in H \mid \delta(z, z_0) = r\}.$$

(a) Zeigen Sie: Jeder hyperbolische Kreis mit Mittelpunkt i ist auch ein Kreis bezüglich der euklidischen Metrik.

(b) Der hyperbolische Kreis K sei definiert durch seinen Mittelpunkt i und den Punkt $z_1 = 2i \in K$. Bestimmen Sie Punkte $z_2, z_3 \in K$, so dass z_1, z_2, z_3 die Eckpunkte eines regelmässigen hyperbolischen Dreiecks sind.

2) Wir betrachten die Gerade $\ell = \{z \in H \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$ und die Abbildung

$$\varphi : H \longrightarrow H, \qquad \varphi(z) = 1 - \frac{2}{2z+1}$$

(a) Zeigen Sie, dass φ eine orientierungserhaltende Isometrie ist und bestimmen Sie die zugehörige Matrix $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

(b) Bestimmen Sie die Bildgerade $\varphi(\ell)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Spiegelung an der Geraden ℓ durch $z \mapsto -\overline{z}$ gegeben ist.

(d) Finden Sie eine explizite Beschreibung der Spiegelung an der Geraden $\varphi(\ell)$.

Abgabe: Keine, Sie erhalten die Musterlösungen zusammen mit dieser Serie.