Einführung in die Komplexen Zahlen (I): Grundlagen*

von U. Kirchgraber und D. Stoffer, Departement Mathematik, ETH-Zürich

Version 1/2006

Zusammenfassung

Im Laufe der Entwicklung musste der Vorrat an Zahlen mehrmals vergrössert werden: Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen, und von da zu den rationalen Zahlen. Die Menge der rationalen Zahlen ist gross genug um lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme zu lösen. Wenn es aber um nichtlineare Gleichungen geht (wie $x^2-2=0$) ist man mit den rationalen Zahlen schnell am Ende des Lateins: Die meisten nichtlinearen Gleichungen sind unlösbar, wenn man nur im Sack der rationalen Zahlen nach Lösungen suchen darf. Einen enormen Fortschritt bringt da die Erweiterung auf die sogenannten reellen Zahlen. Sie braucht man auch, wenn man *alle* Punkte auf einer Geraden durch Zahlen benennen will.

So gross und nützlich die Menge der reellen Zahlen ist, auch sie reicht nicht aus, selbst verhältnismässig simple Gleichungen lösbar zu machen. Das paradigmatische Beispiel dazu ist die quadratische Gleichung $x^2+1=0$. Also braucht es nochmals eine Zahlbereichserweiterung, d.h. neue Objekte und Vorschriften für das Rechnen (addieren, multiplizieren, ...) mit ihnen. Man erhält die komplexen Zahlen. Die komplexen Zahlen stellen einen weitreichenden Durchbruch dar. Nicht nur sind nun *alle* quadratischen Gleichungen lösbar, nein, jede Gleichung n-ten Grades

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

hat nun Lösungen. Und noch viel mehr wird erreicht: Dank der komplexen Zahlen erkennt man, dass die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus auf's Engste mit der Exponentialfunktion zusammenhängen, usw.

Ein Spass nur für Mathematiker/-innen? Mitnichten! Komplexe Zahlen haben auch viele praktische Anwendungen, was ein wenig ein Wunder ist, denn sie sind doch eigentlich "nur" eine Kopfgeburt ...

1 Pro Memoria: Der Aufbau des Zahlensystems

Hier sind noch einmal die grundlegenden Zahlmengen

- Die Menge der *natürlichen* Zahlen $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

*Dieses Material ist eine leicht überarbeitete Fassung eines Handouts, das die Autoren in den letzten Jahren in der jeweiligen Vorlesung Mathematik I für Studierende der Studiengänge Bewegungswissenschaften und Sport, Biologie (biologische und chemische Richtung), Chemie und Pharmazie verwendet haben. Die Studierenden erhielten circa 2 Monate Zeit, um das Material zu studieren, ehe es im Rahmen eines freiwilligen Tutorials zusammengefasst und dann in den üblichen wöchentlichen Übungsserien gesichert wurde. Zur Publikation auf dem EducETH wurde unter dem Titel *Einführung in die Komplexen Zahlen (II): Zur Bedeutung und zum Beweis des Satzes von Gauss* eine Ergänzung verfasst.

- Die Menge der *ganzen* Zahlen $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$
- Die Menge der *rationalen* Zahlen $\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}\}$

Bemerkung 1 *Jede rationale Zahl kann als* abbrechender *oder als* (schliesslich) periodischer Dezimalbruch *geschrieben werden. Hier sind zwei Beispiele*

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{4}{7} = 0.571428571428571428 57\ldots$$

Die wichtigste Zahlmenge für die (sogenannte reelle) Analysis, ist die Menge der *reellen Zahlen*

$$\mathbf{R} = \{\textit{alle} \text{ Dezimalbrüche}\}.$$

Beispiel 1 *Hier sind ein paar Beispiele von reellen - nicht rationalen - Zahlen*

- *0.121121112111112...*
- $\sqrt{2}$ =*1.414213562...*
- π =*3.141592654...*
- e =*2.718281828...*

Bemerkung 2 *Die reellen Zahlen* füllen *die Zahlengerade aus, d.h.: Jedem Punkt entspricht eine Zahl, und jeder Zahl entspricht ein Punkt.*

2 Quadratische Gleichungen Einführung der komplexen Zahlen

Die allgemeine quadratische Gleichung lautet

$$x^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Dabei sind b, c gegebene (reelle) Zahlen, die sogenannten Koeffizienten. Von grosser Bedeutung ist bekanntlich die *Diskriminante*

$$D = b^2 - 4c.$$

Es gilt: *Falls $D > 0$ ist, hat die quadratische Gleichung (1) in* $\mathbf{R}$ *zwei Lösungen.*

Das Problem entsteht, wenn D negativ ist. (Im Fall $D = 0$ hat (1) eine reelle Lösung, die "*doppelt* gezählt" wird, siehe Abschnitt 7.) Das Standard-Beispiel lautet

$$x^2 + 1 = 0.$$

Was ist zu tun? "Man" erfindet neue Zahlen! Das heisst im einzelnen

- Es werden neue *Objekte* (als neue Zahlen) eingeführt
- Es werden *Regeln* für den *Umgang*, d.h. *"das Rechnen"*, mit diesen Objekten "erlassen".

Wahl der neuen Objekte. Man benutzt *Paare* von reellen Zahlen

$$(a, b) \quad a, b \in \mathbf{R}$$

die man üblicherweise wie folgt schreibt

$$a + b \cdot i$$

oder

$$a + bi$$

a heisst *Realteil*, b heisst *Imaginärteil* , und i nennt man die *imaginäre Einheit*.

Dieses i ist der Schlüssel zu den neuen Zahlen, die man *komplexe Zahlen* nennt und mit $\mathbf{C}$ bezeichnet. Die Bedeutung von i wird im übernächsten Abschnitt deutlich, wenn erklärt wird, wie man komplexe Zahlen addiert und multipliziert. Es wird sich dann zeigen, dass i Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist. Man könnte sagen, die Erfindung von i sei eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes, ein Willensakt. Es ist fast unbegreiflich, wie sich diese Erschaffung von neuen Zahlen bewährt, die noch kühner zu sein scheint als andere Zahlbereichserweiterungen.

Beispiel 2 *Hier sind ein paar Beispiele von komplexen Zahlen*

- $3.7 + 4.98i$
- $-22.7 + (-11.39)i = -22.7 - 11.39i$
- $\sqrt{2} + \sqrt{5}i$
- $7.2 + 0 \cdot i = 7.2$ *(die reelle Zahl 7.2 als komplexe Zahl aufgefasst)*
- $0 + 2 \cdot i = 2i$ *(eine sogenannte (rein) imaginäre Zahl)*
- $0 + (-1)i = -i$ *(ebenfalls eine rein imaginäre Zahl)*

Bemerkung 3 *Eine komplexe Zahlen bezeichnet man gerne kurz mit z. Wenn mehrere komplexe Zahlen unterschieden werden sollen, werden sie oft nummeriert: z_1, z_2, z_3, etc.*

Man führt die Bezeichnungen[1] $\Re(z)$ und $\Im(z)$ für den Realteil, bzw. den Imaginärteil einer komplexen Zahl z ein. Es gilt also zum Beispiel für $z = 3.7 + 4.98i$

$$\Re(z) = 3.7 \quad \Im(z) = 4.98.$$

Bitte beachten Sie, dass auch der Imaginärteil einer komplexen Zahl reell ist!

3 Darstellung der komplexen Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene; Betrag und Argument

Weil komplexe Zahlen *Zahlenpaare* sind, lassen sie sich gut in einer Ebene darstellen. Sie wird gelegentlich nach C. F. Gauss (1777-1855) benannt und als *Gauss'sche Zahlenebene* bezeichnet. Oder man spricht auch einfach von der komplexen (Zahlen-)Ebene. Wie die Darstellung erfolgt, ist aus Abbildung 1 ersichtlich.

[1] Statt $\Im$, $\Re$ sind auch die Abkürzungen Re und Im sehr gebräuchlich.

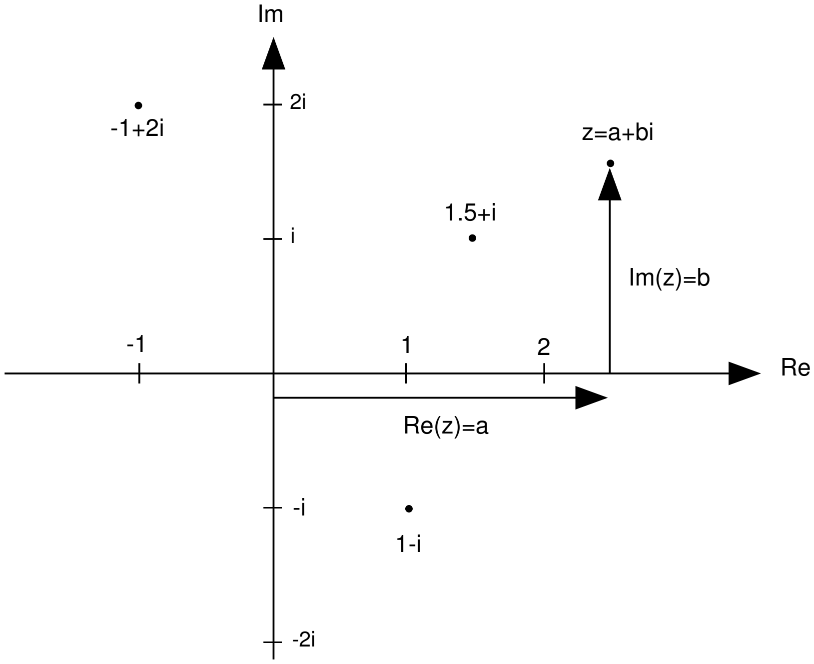

Abbildung 1: Darstellung komplexer Zahlen in der "Gauss'schen" Zahlenebene.

Bemerkung 4 *Die zu z* konjugiertkomplexe *Zahl $\overline{z}$ entsteht durch Spiegelung an der reellen Achse. Hier ist ein Beispiel: Aus $z = 2 + 3i$ folgt $\overline{z} = 2 - 3i$. Die Konjugation spielt im Zusammenhang mit Nullstellen von Polynomen eine wichtige Rolle, siehe Abschnitte 6, 7.*

Betrag und Argument einer Komplexen Zahl. Es sei $z = a + bi$ eine beliebige komplexe Zahl. Unter dem *Betrag* $|z|$ von z versteht man den Abstand des Punktes vom Nullpunkt, siehe Abbildung 2, also

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Das *Argument* $\arg z$ von z ist der *"Polarwinkel"* des Punktes, siehe Abbildung 2, also

$$\arg(z) = \arctan \frac{b}{a}.$$

Hinweis: Vorsicht bei der Wahl des Wertes von arctan! Tip: Orientieren Sie sich immer an einer Zeichnung!

Hier ist ein Beispiel.

Beispiel 3 *Es sei $z = 1 + i$. Dann folgt für den Betrag $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Für das Argument findet man - bitte zeichnen Sie sich z in der komplexen Ebene ein -* $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$*. Dabei ist k eine beliebige ganze Zahl, siehe nachfolgende Bemerkung.*

Bemerkung 5 *Es ist sinnvoll, das Argument einer komplexen Zahl "nur bis auf Vielfache von 2π festzulegen", siehe Fussnote 3.*

4 Die Grundrechenoperationen für komplexe Zahlen

Wenn die neuen Objekte, die man komplexe Zahlen nennt, in irgendeiner Weise die Bedeutung von Zahlen haben sollen, dann muss man mit ihnen rechnen können. Man muss eine Addition und eine Multiplikation festlegen. Die nachfolgende Regel leistet das.

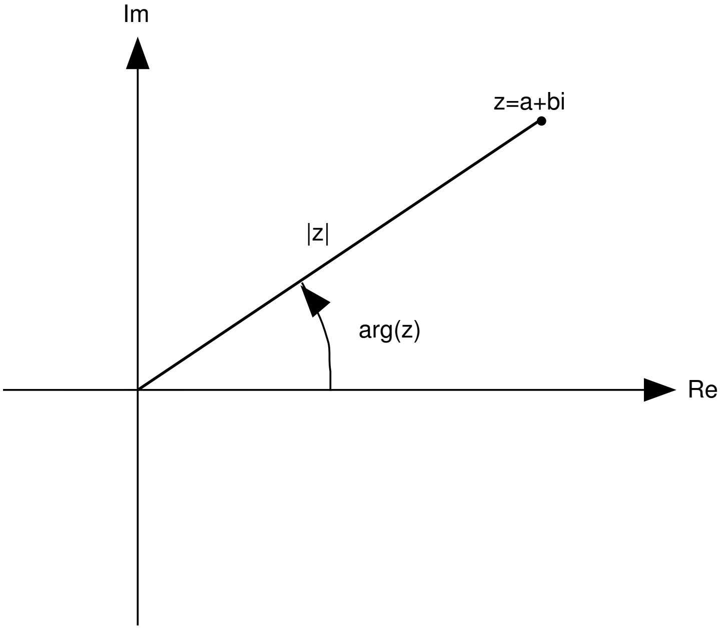

Abbildung 2: Betrag und Argument einer komplexen Zahl z.

Regel für das Rechnen mit komplexen Zahlen

Man rechne mit den komplexen Zahlen wie mit algebraischen Ausdrücken und ersetze jeweils

$$i^2 \quad \text{durch} \quad -1$$

Addition. Wenden Sie die Regel zuerst an einem Beispiel an

$$(3+7i)+(-5-6i) = 3+7i-5-6i = -2+i.$$

Allgemein setzt man: $\boxed{(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}$

Multiplikation. Wenden Sie die Regel zunächst auf ein paar Beispiele an

$$i \cdot i = i^2 = -1$$

$$3i \cdot -4i = -12 \cdot i^2 = (-12)\cdot(-1) = 12$$
$$(4-7i)\cdot i = 4i - 7i^2 = 4i+7 = 7+4i$$
$$(2+3i)\cdot(4+2i) = 8+12i+4i+6i^2 = 2+16i$$

Allgemein setzt man:

$$\boxed{(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + b_1a_2i + a_1b_2i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i}$$

Division. Beginnen Sie wieder mit einem Beispiel

$$\frac{3+7i}{2+4i}$$

Der Trick besteht darin, diesen Bruch mit dem Konjugiertkomplexen des Nenners, d.h. mit der Zahl $2-4i$ zu erweitern. Man erhält

$$\frac{3+7i}{2+4i} = \frac{3+7i}{2+4i} \cdot \frac{2-4i}{2-4i}$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$\frac{3+7i}{2+4i} = \frac{6+14i-12i-28i^2}{4+8i-8i-16i^2} = \frac{34+2i}{20} = 1.7+0.1i$$

Bemerkung 6 *Diesem Vorgehen liegt folgender allgemeiner Sachverhalt zugrunde. Aus $z = a+bi$ folgt, wegen $\overline{z} = a-bi$,*

$$z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Zusammenfassend

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

Allgemein gilt für die Division zweier komplexer Zahlen

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(-a_1b_2+a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2}$$

Somit

$$\boxed{\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{-a_1b_2+a_2b_1}{a_2^2+b_2^2}i}$$

Bemerkung 7 *Bitte lernen Sie diese Formel nicht auswendig - wichtig ist, dass Sie die Methode kennen, wie man den Quotienten von zwei komplexen Zahlen in die "Normalform" $a+bi$ bringt: Man erweitert den Bruch mit dem Konjugiertkomplexen des Nenners.*

Der Rest dieses Handouts zeigt, was alles aus diesen harmlos anmutenden Festlegungen folgt.

5 Geometrische Interpretation der Multiplikation von komplexen Zahlen

Die im letzten Abschnitt eingeführte Addition ist leicht geometrisch zu interpretieren: Ordnet man einer komplexen Zahlen $z = a+bi$ den Vektor (a,b) mit Komponenten a und b zu, so lässt sich die Addition zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ als Addition der beiden Vektoren (a_1, b_1), (a_2, b_2) interpretieren, denn der komplexen Zahl $z_1 + z_2 = (a_1+a_2) + (b_1+b_2)i$ entspricht offenbar der Summenvektor (a_1+a_2, b_1+b_2).

Weniger offensichtlich ist die geometrische Interpretation der Multiplikation zweier komplexer Zahlen. Aber es gibt sie und sie ist hoch interessant! Es seien $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ zwei komplexe

Zahlen und r_1, r_2 ihre Beträge, also $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$. ϕ_1, ϕ_2 seien ihre Argumente. Aufgrund der Definition der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis gilt

$$a_1 = r_1 \cos \phi_1,\ b_1 = r_1 \sin \phi_1 \ \text{ und } a_2 = r_2 \cos \phi_2,\ b_2 = r_2 \sin \phi_2$$

Setzt man diese Darstellungen für a_1, b_1, a_2, b_2 in die Definition von $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$ ein, erhält man, s. Abschnitt 4

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2) + r_1 r_2 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2) i.$$

Unter Benutzung der sogenannten *Additionstheoreme* für die trigonometrischen Funktionen[2] lässt sich das Ergebnis für $z_1 z_2$ wie folgt vereinfachen:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos (\phi_1 + \phi_2) + r_1 r_2 \sin (\phi_1 + \phi_2) i.$$

Das heisst: Das Produkt $z = z_1 z_2$ von z_1 und z_2 ist die komplexe Zahl z mit folgenden beiden Eigenschaften, siehe Abbildung 3:

a) Der Betrag $|z|$ von z ist gleich dem Produkt der Bertäge von z_1 und z_2.

b) Das Argument $\arg z$ von z ist gleich der Summe[3] der Argumente von z_1 und z_2.

Überlegen Sie sich bitte, welche analoge Interpretation die Division zweier komplexer Zahlen hat.

6 Nochmals quadratische Gleichungen

Die quadratische Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

hat jetzt auch zwei Lösungen! Nämlich $x_1 = i$ und $x_2 = -i$, denn es gilt $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ und $(-i)^2 + 1 = i^2 + 1 = 0$.

Es gilt sogar: *Jede quadratische Gleichung mit nicht verschwindender Diskriminante hat in* **C** *zwei Lösungen.* Betrachten Sie die Gleichung

$$x^2 + bx + c = 0, \tag{2}$$

mit reellen Koeffizienten b, c. (Im Prinzip könnte man auch komplexe Zahlen für b, c zulassen. Dieser Fall kommt aber in der Praxis kaum vor. Überdiesie haben die Lösungen eine schöne Symmetrieeigenschaft, wenn die Koeffizienten b, c reell sind, siehe unten.)

[2] Diese besagen, dass folgende Formeln gelten:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

[3] Es kann natürlich sein, dass $\arg z_1 + \arg z_2$ grösser als 2π ist. Um auch dann den Winkel der Verbindungslinie vom Nullpunkt zum Punkt z gegenüber der positiven "reellen Achse" zu erhalten, kann man von $\arg z_1 + \arg z_2$ einfach 2π subtrahieren. Eine bessere Strategie ist, den Begriff Argument einer komplexen Zahl "nur bis auf Vielfache von 2π" festzulegen, siehe Bemerkung 5. Das heisst, wenn $\phi \in [0, 2\pi)$ Argument von z ist, so auch $\phi + k\, 2\pi$. Dabei darf k eine beliebige ganze Zahl sein. Das ist ähnlich wie bei den Brüchen: Die Zahlen $\frac{2}{3}$ und $\frac{2 \cdot k}{3 \cdot k}$ (k eine eine beliebige Zahl verschieden von 0) werden ja auch "identifiziert", das heisst nicht als verschiedene Zahlen angeschaut.

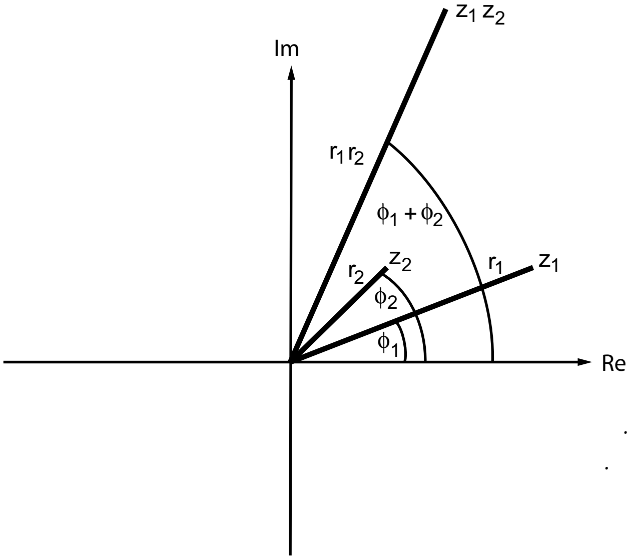

Abbildung 3: Zur Illustration der geometrischen Interpretation der Multiplikation.

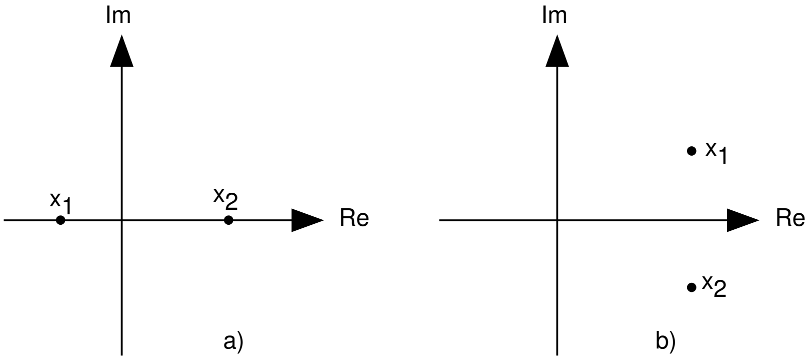

Abbildung 4: Die Nullstellen einer (reellen) quadratischen Gleichung, a) im Fall $D > 0$, b) im Fall $D < 0$.

Die Formel für die Lösungen der Gleichung (2) lautet bekanntlich

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}, \tag{3}$$

mit $D = b^2 - 4c$. Falls $D > 0$ gilt, ergibt (3) die beiden reellen Lösungen. Im Fall $D < 0$ dagegen stellt man die beiden komplexen Lösungen wie folgt dar

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-D} \cdot i \tag{4}$$

Man erkennt, dass die Lösungen im Fall $D < 0$ konjugiert komplex zueinander sind, d.h. es gilt

$$x_2 = \overline{x}_1$$

Geometrisch bedeutet das, dass die beiden Lösungen in der Gauss'schen Zahlenebene symmetrisch zur reellen Achse liegen, sie Abbildung 4.

Bemerkung 8 *Für die quadratische Funktion $x^2 + bx + c$ gilt in jedem Fall die* Produktdarstellung

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Wenn $D = 0$ ist, besitzt (2) nur eine Lösung: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2}$. Jedoch gilt dann

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)^2$$

Aus diesem Grund sagt man, die Gleichung (2) habe im Fall $D = 0$ eine "doppelte" Lösung.

Beispiel 4 *Betrachten Sie das quadratische Polynom $P_2(x) = x^2 - 2x + 10$. Die Nullstellen von P_2 lauten*

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

Daraus folgt

$$(x - (1 + 3i))(x - (1 - 3i)) = x^2 - (1 + 3i)x - (1 - 3i)x + 10 = x^2 - 2x + 10 = P_2(x),$$

wie erwartet.

7 Polynome beliebigen Grades: Der Satz von Gauss

Unter einem Polynom n-ten Grades versteht man eine Funktion der Form

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Dabei ist n eine beliebige natürliche Zahl. a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots a_0$ sind reelle Zahlen, die sogenannten *Koeffizienten* des Polynoms. Man sagt, das Polynom habe *Grad n*.

Eine Lösung der Gleichung

$$P_n(x) = 0$$

heisst *Nullstelle*, oder *Wurzel* des Polynoms.

Die Pointe ist nun, dass nicht nur quadratische Polynome, sondern Polynome beliebigen Grades Nullstellen in **C** *haben.* Das ist der Inhalt des sogenannten *Fundamentalsatzes der Algebra*, den man auch *Satz von Gauss* nennt.

Satz 1 (Fundamentalsatz der Algebra, Satz von Gauss) *Ein Polynom n-ten Grades, n eine natürliche Zahl grösser oder gleich 1,*

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1} hat n (nicht notwendigerweise voneinander verschiedene) Nullstellen. Genauer gesagt: Es gibt n komplexe Zahlen x_1, x_2, $\ldots$, x_n, so dass P_n wie folgt als Produkt von linearen Faktoren geschrieben werden kann

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n).$$

*(*Linearfaktorzerlegung *von P_n)*

Komplexe Nullstellen kommen immer paarweise *vor und sind* konjugiertkomplex *zueinander, siehe Abbildung 5.*

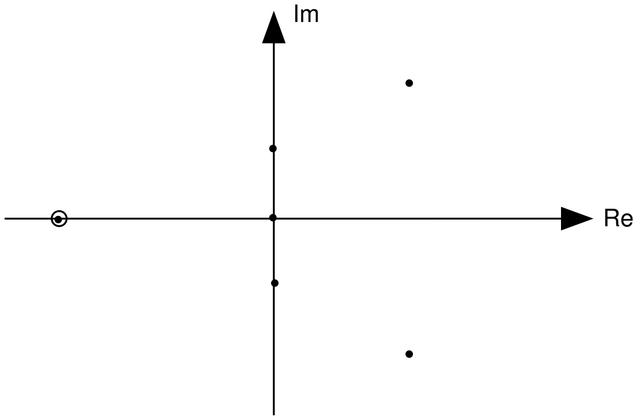

Abbildung 5: Die Nullstellen eines Polynoms 7. Grades in der Gauss'schen Zahlenebene.

Beispiel 5 *Betrachten Sie folgendes Polynom vom Grad 7*

$$P_7(x) = x^7 + 8x^5 + 20x^4 + 13x^3 + 40x^2 + 6x + 20$$

Die Linearfaktorzerlegung lautet

$$P_7(x) = (x+2)(x-i)^2(x+i)^2(x-[1+3i])(x-[1-3i])$$

Daraus folgt: -2, $1+3i$, $1-3i$ sind einfache, i, $-i$ sind doppelte Nullstellen. Abbildung 6 zeigt ihre Lage in der komplexen Ebene. (Doppelte Nullstellen werden durch einen zusätzlichen kleinen Kreis markiert)

Bemerkung 9 *Für weitere Überlegungen zum Fundamentalsatz der Algebra, inklusive einer Beweisskizze, verweisen wir auf U. Kirchgraber, D. Stoffer* Einführung in die komplexen Zahlen (II): Zur Bedeutung und zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

8 Ein unerwarteter Zusammenhang - oder Euler's wunderbare Formel für e^{it}

Wir erinneren an die Taylorreihen[4] für die Funktionen exp, sin, cos

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Man erkennt mit Überraschung, dass zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion offenbar eine erstaunlich enge Verwandtschaft besteht: Sinus und Cosinus ergeben "zusammen" quasi die Exponentialfunktion! Um diesen Zusammenhang wirklich herstellen zu können

[4]Für eine alternative Begründung von Euler's Formel, ohne Benutzung von Taylorreihen, siehe Abschnitt 9.

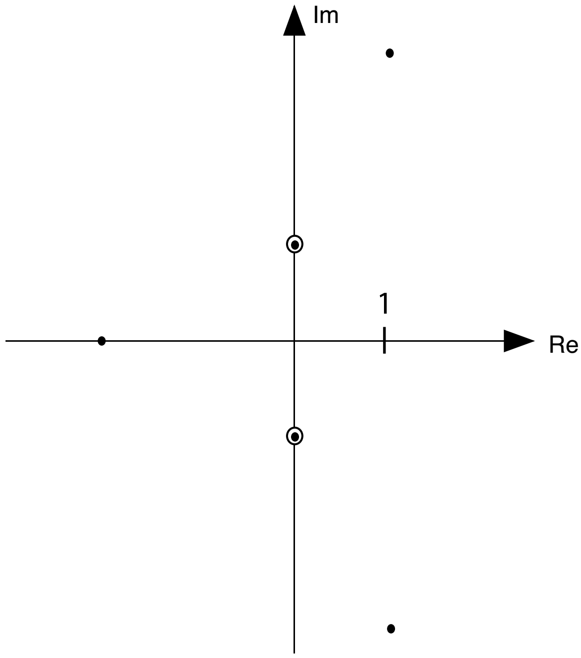

Abbildung 6: Die Nullstellen des Polynoms $P_7(x) = x^7 + 8x^5 + 20x^4 + 13x^3 + 40x^2 + 6x + 20$ in der Gauss'schen Zahlenebene.

braucht man allerdings komplexe Zahlen, insbesondere die imaginäre Einheit i und ihre Fundamental-Eigenschaft

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad \ldots$$

Man weiss aus der Taylortheorie, dass die obigen Reihen für beliebige reelle Werte von z benutzt werden dürfen. Wir werden sie nun auch für komplexe Zahlen z verwenden. (Man kann zeigen, dass das "Sinn" macht und dass dadurch die Definition der Funktionen Sinus, Cosinus und der Exponentialfunktion von der reellen Achse auf die ganze komplexe Ebene ausgedehnt wird.)

Wir setzen[5] $z = it$, wobei wir uns unter t eine reelle Zahl vorstellen, sodass z "rein imaginär" ist. Betrachten Sie e^{it}

$$\begin{aligned}
e^{it} &= 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \frac{(it)^5}{5!} + \frac{(it)^6}{6!} + \ldots \\
&= 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots \\
&= (1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots) + i(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots) \\
&= \cos t + i \sin t
\end{aligned}$$

Das ist nun die berühmte Euler'sche Formel: $\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t}$

Eine besonders eindrückliche Formel erhält man, wenn man in der Euler'schen Formel speziell $t = \pi$ einsetzt. Wegen $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$ folgt nämlich

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

[5]Man schreibt die Zahl (hier die imaginäre Einheit), wie üblich, vor der Variablen (hier t).

Die Faszination, die von diesem Ausdruck ausgeht, besteht darin, dass er einen Zusammenhang herstellt zwischen fünf "fundamentalen Zahlen" der Mathematik: 0, 1, i, e und π. Wir wollen jedoch nicht in Zahlenmystizismus verfallen!

Die Eulerformel erlaubt es, die trigonometrischen Funktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion auszudrücken. Wir benutzen folgende Formeln

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \qquad e^{-it} = \cos t - i \sin t.$$

(Die zweite erhält man aus der ersten, indem man t durch $-t$ ersetzt und berücksichtigt, dass $\cos(-t) = \cos t$, und $\sin(-t) = -\sin t$ gilt.) Durch Addition und Subtraktion erhält man

$$\begin{aligned}\cos t &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\ \sin t &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\end{aligned}$$

Durch die Eulerformel kann man e^z für rein imaginäre Werte von z in der Form

$$\text{Realteil} + i \cdot \text{Imaginärteil}$$

ausdrücken (wie es sich gehört). Hier ist die entsprechende Formel für *beliebiges* komplexes $z = a + ib$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Oder

$$\boxed{e^z = e^{\Re(z)}(\cos[\Im(z)] + i \sin[\Im(z)]).}$$

9 Euler's wunderbare Formel - ein alternativer Zugang

[6]

Man betrachte die Funktion $x(t) = e^{at}$, wo a eine (reelle) Zahl ist. Offenbar gilt $x(0) = e^{a \cdot 0} = e^0 = 1$. Leitet man $x(t)$ ab, folgt $\dot{x}(t) = ae^{at} = ax(t)$. Das heisst, zusammenfassend: Die Funktion $x(t) = e^{at}$ erfüllt einerseits die *Differentialgleichung*

$$\dot{x}(t) = ax(t) \tag{5}$$

und andererseits die *Anfangsbedingung*

$$x(0) = 1. \tag{6}$$

Tatsächlich ist die Funktion e^{at} durch die Bedingungen (5), (6) bestimmt. Nehmen Sie nämlich an, $x(t)$ sei irgend eine Funktion, die den Bedingungen (5), (6) genügt. Multipliziert man dann Gleichung (5) mit e^{-at} und bringt den Term auf der rechten Seite nach links, erhält man

$$\dot{x}(t)e^{-at} - ae^{-at}x(t) = 0. \tag{7}$$

[6]Dieser Abschnitt richtet sich an Leserinnen und Leser, die mit der Differentialrechnung, aber nicht mit Taylorpolynomen und Taylorreihen vertraut sind.

Die linke Seite von (7) ist aber nach der Produktregel gerade die Ableitung des Produkts $x(t)e^{-at}$. Das heisst, Gleichung (7) lässt sich wie folgt schreiben

$$(x(t)e^{-at})^{\cdot} = 0.$$

Daraus folgt, dass $x(t)e^{-at}$ eine Konstante sein muss:

$$x(t)e^{-at} = c.$$

Setzt man in der letzten Gleichung speziell $t = 0$, folgt, unter Benutzung von (6)

$$c = x(0)e^{-a\cdot 0} = x(0)e^{0} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Das heisst: Für alle t gilt

$$x(t)e^{-at} = 1,$$

und somit, nach Multiplikation mit e^{at},

$$x(t) = e^{at},$$

wie behauptet.

Betrachten Sie nun anstelle von (5), (6) die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = ix(t), \tag{8}$$

wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet, sowie wieder die Anfangsbedingung

$$x(0) = 1. \tag{9}$$

Die Lösung des Problems (8), (9) wird man ohne zu zögern mit e^{it} bezeichnen

$$x(t) = e^{it}. \tag{10}$$

Nur, was bedeutet e^{it}?

Betrachten Sie weiter die Funktion

$$y(t) = \cos t + i \sin t. \tag{11}$$

Für $t = 0$ erhält man

$$y(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1.$$

Ableiten von $y(t)$ ergibt

$$\dot{y}(t) = -\sin t + i \cos t.$$

Bildet man des weiteren

$$iy(t) = i(\cos t + i \sin t) = i \cos t + i^2 \sin t = i \cos t - \sin t = \dot{y}(t).$$

Das bedeutet: Die Funktion $y(t)$ erfüllt die Differentialgleichung (8) und die Anfangsbedingung (9). Damit lüftet sich das Geheimnis. Es gilt

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \tag{12}$$

Das ist Euler's berühmte Formel, wobei sie hier nun als *Definition* von e^{it} auftritt.

10 Epilog

Das war eine kurze Einführung in die Welt der komplexen Zahlen. Das Thema ist wichtig im Zusammenhang mit der Behandlung von sogenannten *Eigenwertproblemen*. Damit wird im nächsten Abschnitt der Vorlesung Mathematik I begonnen, und es ist ein zentrales Thema im zweiten Semester, in der Mathematik II. Warum? Weil das Eigenwertproblem der *Schlüssel zur Lösung von linearen Differentialgleichungssytemen mit konstanten Koeffizienten* ist. Und Differentialgleichungen, das wissen Sie, sind wichtig, wenn es darum geht aussermathematische Prozesse mit mathematischen Mitteln zu erfassen und Prognosen zu machen.

UK+DS/11.1.2000/20.10.03/12.8.06