D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Lineare Algebra I HS 13
Tom Ilmanen

Zusatzaufgaben

1. Sudoku für Mathematiker:

Es sei $G = \{a, b, c, x, y, z\}$ und $\circ : G \times G \to G$ eine Verknüpfung, welche über die folgende (unvollständige) Verknüpfungstafel beschrieben wird:

$\circ$	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Hierbei bedeutet der Eintrag y in Zeile c und Spalte b, dass $c \circ b = y$ gilt. Die meisten Einträge dieser Tabelle fehlen noch. Ihre Aufgabe ist es, diese Tabelle zu vervollständigen und dabei die Gruppenaxiome zu erfüllen:

- Assoziativität der Verknüpfung,
- Existenz des neutralen Elements,
- Invertierbarkeit.

2. Gegeben ist der Vektorraum $\Gamma(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aller Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume?

a) Die Menge aller nach oben beschränkten Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$; d.h. es gibt ein $c_a \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq c_a$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

b) Die Menge aller konvergenten Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$; d.h. $\lim_{i\to\infty} a_i \in \mathbb{R}$ existiert.

c) Die Menge aller divergenten, d.h. nicht konvergenten, Folgen.

d) Die Menge aller geometrischen Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$; d.h. $a_i = a_0 q_a^i, q_a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Die Zahlen c_a, q_a können von Folge zu Folge variieren; argumentiere mit Schulkenntnissen.

Bitte wenden!

3. Finde eine Basis für die folgenden Vektorräume:

a) $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$, wobei $v_1 = (1,2,3), v_2 = (4,5,6), v_3 = (7,8,9)$,

b) Die Lösungsmenge in $\mathbb{R}^3$ von $5x - 2y + 3z = 0$,

c) Die Lösungsmenge in $\mathbb{R}^3$ von

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 0 \\ x - y &= 0, \end{aligned}$$

d) $\{0\}$,

e) $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | x + iy = 0\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$,

f) $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | x + iy = 0\}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$,

4. Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V definieren wir

$$h(V) := \sup\{n \in \mathbb{N} \;:\; \text{es gibt eine Kette } V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n \text{ von Untervektorräumen } V_i \subset V \text{ und } V_i \neq V_{i+1} \text{ für } i = 0, ..., n-1\}.$$

Zeige $h(V) = \dim(V)$.

5. Bestimmen Sie die Menge aller Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft, dass die Summe über alle Einträge jeder Zeile, jeder Spalte und beider Diagonalen einen vorgegebenen Wert $c \in \mathbb{R}$ annimmt.

Wie lautet Zahl a_{22}?

6. In einer Stadt gibt es n Einwohner und m Vereine. Ausserdem sind die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

- Jeder Verein hat eine ungerade Anzahl an Mitgliedern,
- Je zwei Vereine haben eine gerade Anzahl an gemeinsamen Mitgliedern (auch null ist möglich).

Zeigen sie, dass $m \leq n$ gilt.

Hinweis: Versuchen sie, die Vereine als Vektoren mit Einträgen aus $\mathbb{F}_2$ aufzufassen und überlegen sie sich, was die zwei Bedingungen für diese Vektoren implizieren.

Siehe nächstes Blatt!

7. In $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$v_1 = (0,4,0)\,,\ \ v_2 = (1,-2,0)\,,\ \ v_3 = (4,5,6)$$

und

$$w_1 = (1,0,0)\,,\ \ w_2 = (0,1,0)\,,\ \ w_3 = (0,0,1)$$

gegeben. Listen sie alle Ketten von Basen

$$\mathfrak{B}_0 = \{v_1, v_2, v_3\}\,,\ \ \mathfrak{B}_1,\ \ \mathfrak{B}_2,\ \ \mathfrak{B}_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$$

auf, sodass

$$\mathfrak{B}_{i+1} = (\mathfrak{B}_i \setminus \{a\}) \cup \{b\}\,, \qquad i = 0,1,2,$$

wobei $a \in \{v_1, v_2, v_3\}$ und $b \in \{w_1, w_2, w_3\}$, das heisst $\mathfrak{B}_{i+1}$ unterscheidet sich von $\mathfrak{B}_i$ durch das Ersetzten eines Elements von $\{v_1, v_2, v_3\}$ durch ein Element von $\{w_1, w_2, w_3\}$.

8. Es seien U, V, W endlich dimensionale Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Welche Bedingungen sind an die Dimensionen $\dim U$, $\dim V$ und $\dim W$ zu stellen, damit die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(U,V) \times \mathrm{Hom}(V,W) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(U,W) \\ (G,F) & \longmapsto & F \circ G \end{array}$$

surjektiv ist?

9. Seien $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{N}$. Berechne die Dimension von

$$\mathrm{Hom}\left(\mathrm{Hom}\left(\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^a, \mathbb{R}^b\right), \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^c, \mathbb{R}^d\right)\right), \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^f\right), \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^g, \mathbb{R}^h\right)\right)\right),$$

wobei für zwei Vektorräume V und W

$$\mathrm{Hom}\,(V, W) = \{f : V \to W : f \text{ ist linear}\}$$

der Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W bezeichnet.