D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Lineare Algebra I HS 13
Tom Ilmanen

Musterlösung 1

1. Über den allgemeinen Ansatz $y = mx + n$ erhält man durch Einsetzen der beiden gegebenen Punkte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= -m + n, \\ 2 &= 2m + n, \end{aligned}$$

welches die Lösung $(m, n) = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ besitzt.

Die Gleichung, die L beschreibt, lautet also $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$.

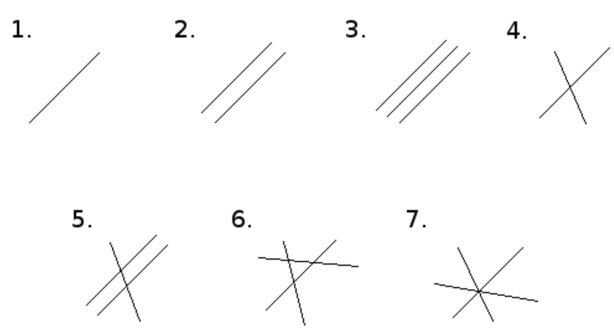
Die Gerade kann auch als Teilmenge vom $\mathbb{R}^2$ geschrieben werden:

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - 3y = -4\right\}.$$

2. **a)** Es gibt 7 mögliche Fälle:

1. 3 zusammenfallende Geraden,
2. 3 parallele Geraden, von denen genau 2 zusammenfallen,
3. 3 parallele, nicht zusammenfallende Geraden,
4. 2 zusammenfallende Geraden und eine dazu schiefe Gerade,
5. 2 parallele, nicht zusammenfallende Geraden und eine dazu schiefe Gerade,
6. 3 zueinander schiefe Geraden, die sich paarweise je in einem Punkt schneiden,
7. 3 zueinander schiefe Geraden, die sich alle in genau einem Punkt schneiden.

Der 6. Fall ist generisch.



b) Hier gibt es 8 mögliche Fälle, 7 davon sind analog zur Teilaufgabe a):

1. 3 zusammenfallende Ebenen,
2. 3 parallele Ebenen, von denen genau 2 zusammenfallen,
3. 3 parallele, nicht zusammenfallende Ebenen,
4. 2 zusammenfallende Ebenen und eine dazu schiefe Ebene,
5. 2 parallele, nicht zusammenfallende Ebenen und eine dazu schiefe Ebene,
6. 3 zueinander schiefe Ebenen, die sich je in einer Gerade schneiden, wobei die 3 Geraden parallel sind,
7. 3 zueinander schiefe Ebenen, die sich in genau einer Geraden schneiden,
8. 3 zueinander schiefe Ebenen, die sich in genau einem Punkt schneiden.

Der 8. Fall ist generisch.

c) Für $n = 1$ gibt es 2 mögliche Arrangements: Hyperebenen der Dimension 0 sind Punkte, die entweder identisch sind oder nicht. Im generischen Fall sind die Punkte nicht identisch.

Falls $n > 1$, so gibt es 3 Möglichkeiten: Die Schnittmenge der 2 Hyperebenen der Dimension $n-1$ ist entweder leer, eine Hyperebene der Dimension $n-2$ oder die beiden Hyperebenen fallen zusammen und sind gleich ihrer Schnittmenge.

Der generische Fall ist derjenige, in welchem die Schnittmenge eine Hyperebene der Dimension $n - 2$ ist.

3. Im generischen Fall haben die beiden Gleichungen nicht die gleichen Steigungen, d.h. die Verhältnisse $a_{11} : a_{12}$ und $a_{21} : a_{22}$ sind nicht gleich. Ausserdem ist höchstens einer der Koeffizienten a_{12} und a_{22} null, da sonst die zweite Gerade entartet wäre.

Falls beide nicht null sind, so folgt aus $\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{21}}{a_{22}}$ sofort $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Andernfalls sei oBdA[1] $a_{12} = 0$. Dann sind a_{11} und a_{22} beide nicht null, d.h.

$$a_{11}a_{22} - \underbrace{a_{12}}_{=0}a_{21} = a_{11}a_{22} \neq 0.$$

Umgekehrt bedeutet das Eintreten des nicht-generischen Falles, dass die beiden Geraden parallel sind. Für die Geradengleichungen $a_{i1}x + a_{i2}y = b_i$ mit $i \in \{1, 2\}$ bedeutet dies, dass die Verhältnisse $a_{11} : a_{12}$ und $a_{21} : a_{22}$ gleich sind:
Entweder sind $a_{12} = a_{22} = 0$ oder wir erhalten die Gleichung $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$. In beiden Fällen ist nun $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ offensichtlich.

[1] oBdA = ohne Beschränkung der Allgemeinheit. In diesem Fall bedeutet dies, dass wir (notfalls durch Vertauschen der Variablen oder Gleichungen) davon ausgehen können, dass $a_{12} = 0$ gilt.

4. Je ein einfaches Beispiel:

a) Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

hat die Lösungen $\{(x, 1-x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$.

b) Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z - w &= 0 \\ x + y - z - w &= 2 \\ 2x + y - 3z + w &= 2 \end{aligned}$$

hat keine Lösung.

c) Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \\ x - y &= -1 \\ 4x - 4y &= -4 \end{aligned}$$

hat nur die Lösung $(x, y) = (0, 1)$.