Musterlösung 10

1. Wir wissen, dass die Vektoren $v, F(v), F^2(v), \ldots, F^n(v)$ alle ungleich Null sind. Denn aus $F^i(v) = 0$ für $0 \leq i \leq n$ folgt $F^n(v) = F^{n-i}(F^i(v)) = 0$. Seien $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$$\lambda_0 v + \lambda_1 F(v) + \ldots + \lambda_n F^n(v) = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = F^n(0) &= F^n\left(\lambda_0 v + \ldots + \lambda_n F^n(v)\right) \\ &= \lambda_0 F^n(v) + \lambda_1 F^{n+1}(v) + \ldots + \lambda_n F^{2n}(v) = \lambda_0 F^n(v) \end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen $F^k(v) = 0$ für $k > n$ gebraucht haben. Wir schliessen daraus dass $\lambda_0 = 0$ gelten muss. Also gilt

$$\lambda_1 F(v) + \ldots + \lambda_n F^n(v) = 0.$$

Wir argumentieren nun genau gleich wie im ersten Schritt. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = F^{n-1}(0) &= F^{n-1}\left(\lambda_1 F(v) + \ldots + \lambda_n F^n(v)\right) \\ &= \lambda_1 F^n(v) + \ldots + \lambda_n F^{2n-1}(v) = \lambda_1 F^n(v) \end{aligned}$$

woraus $\lambda_1 = 0$ folgt. So können wir weiterfahren und daraus schliessen dass $\lambda_i = 0$ für alle $0 \leq i \leq n$ gelten muss. Also sind die Vektoren $v, F(v), F^2(v), \ldots, F^n(v)$ linear unabhängig.

2. Wir geben zwei Lösungen für diese Aufgabe an.

Erste Lösung: Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt

$$\dim V = \dim \operatorname{Kern} F + \dim \operatorname{Bild} F.$$

Es gilt somit

$$\operatorname{Kern} F = \{0\} \iff \dim \operatorname{Kern} F = 0 \iff \dim V = \dim \operatorname{Bild} F \iff \operatorname{Bild} F = W.$$

Dabei ist die erste Bedingung genau die Aussage, dass F injektiv ist, und die letzte, dass F surjektiv ist. Die beiden Bediungen können also nur gleichzeitig erfüllt werden.

Bitte wenden!

Zweite Lösung: Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern gleich $\{0\}$ ist. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Der Kern von F ist genau dann $\{0\}$, wenn die Bilder der Basiselemente linear unabhängig sind. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn die Bilder der Basiselemente ganz W aufspannen, also wiederum genau dann, wenn F surjektiv ist.

3. **a)** Falls F ein Isomorphismus ist, so ist F surjektiv, also spannen die Vektoren $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ ganz W auf. Als Isomorphismus ist F allerdings auch injektiv, d.h. $\operatorname{Kern} F = \{0\}$. Dies wiederum bedeutet, dass die Bilder $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ linear unabhängig sind. Somit ist $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ eine Basis von W.

Sei nun $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ eine Basis von W, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig und spannen ganz W auf. Dann ist F dank der Linearität surjektiv: Für $w \in W$ existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so dass $w = \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_n F(v_n) = F(\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n)$, also $w \in \operatorname{Bild} F$. Gleichzeitig ist F auch injektiv: Für $v \in V$ gibt es eindeutige $\mu_1, \ldots \mu_n$ mit $v = \mu_1 v_1 + \cdots \mu_n v_n$, d.h. unter F gilt $F(v) = F(\mu_1 v_1 + \cdots \mu_n v_n) = \mu_1 F(v_1) + \cdots \mu_n F(v_n)$. Da $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ linear unabhängig sind, ist $F(v) = 0$ genau dann wenn $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$, also genau dann wenn $v = 0$.

b) Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Nach Aufgabe **a)** ist F genau dann ein Isomorphismus, wenn $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ eine Basis von W ist. Da W die gleiche Dimension n wie V hat, reduziert sich die Frage also darauf, ob die Bilder der Basisvektoren linear unabhängig sind. Geometrisch bedeutet lineare Abhängigkeit ja, dass die n Vektoren in einer $n-1$-dimensionalen Hyperebene durch den Nullpunkt liegen. Wenn man aber n zufällige Punkte im $\mathbb{K}^n$ auswählt, so kann man sich leicht veranschaulichen, dass es doch sehr unwahrscheinlich ist, dass diese genau in einer $n-1$-dimensionalen Hyperebene durch den Nullpunkt liegen.

4. **a)** $Ax = 0$ ist äquivalent zu einem linearem Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten. Also ist das System unterbestimmt, d.h. es gibt nicht-triviale Lösungen.

b) Diese Aussage ist falsch, da L leer sein kann, $\{x \in \mathbb{K}^m \mid Ax = 0\}$ jedoch mindestens $x = 0$ enthält.

c) Nein, da z. B. $U_1 = \operatorname{Span}\binom{1}{0}$, $U_2 = \operatorname{Span}\binom{0}{1}$, $U_3 = \operatorname{Span}\binom{1}{1}$ die Formel nicht erfüllt. (Übung: Leite die korrekte Formel aus der bekannten Formel für 2 Untervektorräume her!)

d) Richtig: Jede Matrix A kann als Abbildung $F_A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ aufgefasst werden. Die Bedingung aus der Aufgabe sagt genau, dass F_A surjektiv ist, und somit nach Aufgabe **2.** auch injektiv.

Siehe nächstes Blatt!

e) "$\Longleftarrow$" trivial; "$\Longrightarrow$" $au + bv + cw = 0$ mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, also $a \neq 0 \Rightarrow u \in \mathrm{Span}(v, w)$ oder $b \neq 0 \Rightarrow v \in \mathrm{Span}(u, w)$ oder $c \neq 0 \Rightarrow w \in \mathrm{Span}(u, v)$

f) Falsch: Es bezeichne V den Vektorraum der von den beiden angegebenen Vektoren aufspannt wird, und W den Vektorraum der Lösungen der linearen Gleichung. Dann gilt mit der Dimensionsformel

$$\dim\Big(V \cap W\Big) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) \geq 2 + 3 - 4 = 1.$$

g) Richtig: Beide haben eine Basis der Kardinalität $2^{\aleph_0}$.

5. 1) Sei $P : V \to V$ eine Projektion mit $\mathrm{Kern}P := W_1$ und $\mathrm{Bild}P := W_2$. Wir müssen zeigen, dass W_1 und W_2 komplementär sind. Wir zeigen zunächst, dass $V = W_1 + W_2$. Sei $v \in V$. Dann gilt $P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$, also $v - P(v) \in \mathrm{Kern}P = W_1$. Natürlich gilt $P(v) \in \mathrm{Bild}P = W_2$, also ist $v = v - P(v) + P(v)$ die gesuchte Zerlegung. Es bleibt also zu zeigen, dass $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Sei dazu $v \in W_1 \cap W_2$. Da v insbesondere im Bild von P liegt, gibt es ein $w \in V$, so dass $P(w) = v$. Wenden wir P auf beiden Seiten der Gleichung an so folgt $P^2(w) = P(w) = P(v)$. Da aber v ebenfalls im Kern von P ist, haben wir $0 = P(v) = P(w) = v$.

2) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ zwei komplementäre Untervektorräume von V, also $V = W_1 \oplus W_2$. Wähle eine Basis $\{u_1, ..., u_k\}$ von W_1 und eine Basis $\{v_1, ...v_l\}$ von W_2. $\{u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_l\}$ bildet dann eine Basis von V. Definiere nun $P(u_i) = 0$ für $i = 1, ..., k$ und $P(v_j) = v_j$ für $j = 1, ..., l$. Man kann nun prüfen, dass P die gewünschten Bedingungen erfüllt.

Eindeutigkeit: Wir zeigen, dass eine Projektion durch ihren Kern und ihr Bild eindeutig bestimmt ist. Seien wie oben $\mathrm{Kern}P := W_1$ und $\mathrm{Bild}P := W_2$. Wie oben gezeigt gilt $V = W_1 \oplus W_2$. Sei nun P' eine weitere Projektion mit gleichem Kern und Bild. Trivialerweise gilt $P = P'$ auf dem Kern. Sei nun $v \in W_2$, d.h. es gibt $w, w' \in V$, so dass $P(w) = v$ und $P'(w') = v$. Es folgt

$$P(v) - P'(v) = P(P(w)) - P'(P'(w')) = P(w) - P'(w') = v - v = 0$$

und damit die Behauptung.