Tom Ilmanen

Musterlösung 11

1. a) Wir wählen zuerst eine Basis von $\operatorname{Kern} F$, zum Beispiel $u_1 = (1, -2, 0)^\top, u_2 = (0, -3, 1)^\top$. Diese ergänzen wir zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ mit $v_1 = (1, 0, 0)^\top$ (Bemerke dass wir v_1 in $\mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Kern} F$ frei wählen können). Nun sei $w_1 = F(v_1) = (2, -4)^\top$. Erneut ergänzen wir w_1 zu einer Basis von $\mathbb{R}^2$ mit $z_1 = (1, 0)^\top$. Es erfüllen v_1, u_1, u_2, w_1, z_1 die Bedingungen.

b) Sei $x \in \operatorname{Bild} F$. Sei $a \in \mathbb{R}^3$ mit $F(a) = x$. Für jedes $b \in F^{-1}(x)$ gilt $F(a-b) = F(a) - F(b) = x - x = 0$ und für $c \in \operatorname{Kern} F$ gilt $F(a + c) = F(a) + F(c) = x + 0 = x$. Also folgt

$$(*) \qquad F^{-1}(x) = \{a + c \mid c \in \operatorname{Kern} F\}.$$

Wir suchen nun ein solches a. Da $x \in \operatorname{Bild} F = \operatorname{Span}(2, -4)^\top$ gilt $x = (t, -2t)^\top, t \in \mathbb{R}$. Wir wissen, dass $F((1, 0, 0)^\top) = (2, -4)^\top$, und somit auch $F((\frac{1}{2}t, 0, 0)^\top) = (t, -2t)^\top$. Nach $(*)$ gilt nun

$$F^{-1}(x) = \frac{1}{2}tv_1 + ru_1 + su_2 = (\frac{1}{2}t, 0, 0) + r(1, -2, 0) + s(0, -3, 1), \quad r, s \in \mathbb{R}$$

mit $x = (t, -2t)^\top$.

Sei nun $y \in F^{-1}(x) \cap \operatorname{Span}(v_1)$. Dann gilt $y = qv_1 = \frac{1}{2}tv_1 + ru_1 + su_2$ mit $q, r, s \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$(\frac{1}{2}t - q)v_1 + ru_1 + su_2 = 0.$$

Da (v_1, u_1, u_2) eine Basis ist und insbesondere linear unabhängig, hat die Gleichung nur die eine triviale Lösung $q = \frac{1}{2}t, r = 0, s = 0$ und somit ist $F^{-1}(x) \cap L(v_1) = \{\frac{1}{2}t \cdot v_1\}$.

2. Vorgehen: Wir basteln uns eine lineare Abbildung F, die genau U als Kern hat. Die zugehörige Abbildungsmatrix A liefert dann über $Ax = 0$ ein Gleichungssystem in n Gleichungen und n Unbekannten, das genau U als Lösung hat.

Da U ein Unterraum ist, gibt es eine Basis $u_1, \ldots, u_m$ von U mit $m \leq n$. Diese lässt sich zu einer Basis $u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ ergänzen. Nun können wir uns eine lineare Abbildung F mit Kern U wiefolgt basteln: Nach einem Satz aus der Vorlesung gibt es nämlich eine lineare Abbildung F, so dass $F(u_i) = 0$ und

Bitte wenden!

$F(v_j) = v_j$ für alle passenden i, j. Da $u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ eine Basis ist, ist nun klar, dass F genau U als Kern hat. Wie im Vorgehen weiter oben beschrieben, gibt es nun eine zu F zugehörige Matrix A, die die lineare Abbildung beschreibt. Es ist klar, dass $Ax = 0$ ein Gleichungssystem mit den gewünschten Eigenschaften definiert.

3. b) Quelltext:

```
A = [  2  1  4  1;
       1 -1  0  2;
      -1  3 -2 -1;
       3  1  6  2;
       1  1  2  0];

[n,m] = size(orth(A));
disp(sprintf('Rang der Matrix: %i',m))
disp(sprintf('Basis des Spaltenraums: '))
orth(A)
disp(sprintf('Basis des Zeilenraums: '))
orth(A')'
disp(sprintf('Basis des Kerns: '))
null(A)
```

Ausgabe:

```
Rang der Matrix: 4
Basis des Spaltenraums:

ans =

   -0.5127   -0.1860   -0.0154    0.1887
   -0.1011    0.4603    0.8463    0.2483
    0.2412   -0.8198    0.5073   -0.1111
   -0.7801   -0.1078    0.0978   -0.4512
   -0.2453   -0.2642   -0.1287    0.8287

Basis des Zeilenraums:

ans =

   -0.4370   -0.0789   -0.8517   -0.2782
   -0.0854    0.9272    0.0746   -0.3569
   -0.2711   -0.3608    0.4282   -0.7829
    0.8533   -0.0622   -0.2927   -0.4269
```

Siehe nächstes Blatt!

```
Basis des Kerns:

 ans =

Empty matrix: 4-by-0
```

4. **a)** $(a, b) = (0, 0) \implies \operatorname{Rg} A = 0.$

$$(a, b) \neq (0, 0) \implies \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \underbrace{(a^2 + b^2)}_{\neq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \operatorname{Rg} A = 2.$$

b) Eine 2×2-Matrix hat Rang 0, 1 oder 2. Matrizen mit Rang 0 oder 2 haben wir schon in a) gesehen. Es ist also bloss noch eine komplexe Matrix der gesuchten Form anzugeben, welche Rang 1 hat.

$$\operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = 1\,.$$

5. **a)** Da wir eine Matrix suchen, die die Einheitsmatrix bezüglich neuer Basen darstellt, müssen wir nur die Vektoren v_i durch die Vektoren w_j darstellen. Dies ergibt dann genau die Spalten der gesuchten Matrix. Da $v_1 = 2w_3$, $v_2 = 2(w_1 + w_2 + w_3)$ und $v_3 = 2w_1$ ergibt sich also als Lösung die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Es gilt $Fv_1 = (-2, 0, 2) = -\frac{1}{2}v_1 - v_2$ und $Fv_2 = (1, -2, 1) = \frac{3}{4}v_1 - \frac{1}{2}v_2$, also ergibt sich als Abbildungsmatrix bezüglich der Basis von W

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $(x^n)' = nx^{n-1}$, d.h. die Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

d) Gesucht ist eine Matrix $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, so dass $M_{\mathcal{B}}(F) \cdot Cv = C \cdot Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Dadurch ergibt sich durch Einsetzen der Vektoren $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ und Koordinatenvergleich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_{11} + \varepsilon c_{21} &= c_{11}, \\ c_{21} &= c_{21}, \\ c_{12} + \varepsilon c_{22} &= c_{11} + c_{12}, \\ c_{22} &= c_{21} + c_{22}. \end{aligned}$$

Somit gilt $\varepsilon c_{22} = c_{11}$ und $c_{21} = 0$. Wir probieren deshalb die Matrix $C = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aus und erhalten auf beiden Wegen, dass e_1 auf $(\varepsilon, 0)$ und e_2 auf $(\varepsilon, 1)$ abgebildet werden. Die Matrix C erfüllt also die Bedingungen. Die Einheitsvektoren haben also in der neuen Basis die Koordinaten $(\varepsilon, 0)$ beziehungsweise $(0, 1)$, also gilt $e_1 = \varepsilon v_1$ und $e_2 = v_2$ für die Basisvektoren v_1, v_2 der gesuchten Basis. Also ist $\mathcal{B} = \{v_1 = (1/\varepsilon, 0), v_2 = (0, 1)\}$ eine Basis mit den gewünschten Eigenschaften ist.

Wir nehmen nun an, dass es auch im Fall $\varepsilon = 0$ eine solche Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ gibt. Definiere $T = (v_1 | v_2)$. Dann würde folgen, dass $A = T^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, was natürlich ein Widerspruch ist.

6. Da F den Rang r hat, gibt es linear unabhängige Vektoren $v'_1, \ldots, v'_r \in V$, so dass die Bilder $F(v'_i)$ eine Basis vom Bild von F sind. Wähle ausserdem eine Basis $v'_{r+1}, \ldots, v'_n$ von $\ker(F)$. Dann ist $\mathcal{A} = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ eine Basis von V.

Wir ergänzen nun die Vektoren $w'_1 := F(v'_1), \ldots, w'_r := F(v'_r)$ durch $w'_{r+1}, \ldots, w'_m$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ von W. Die Behauptung ist nun, dass die Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ die Bedingung der Aufgabe erfüllen.

Wir prüfen dies anhand der Vektoren einer Basis von V nach und nehmen dafür die Vektoren v'_i. Für eine beliebige Basis $\mathcal{C}$ bezeichne $e_i^{\mathcal{C}}$ den i-ten Einheitsvektor in dieser Basis. Aus der Konstruktion gilt nun für $i \in \{1, \ldots, r\}$, dass $F(v'_i) = w'_i = e_i^{\mathcal{B}}$ und $v'_i = e_i^{\mathcal{A}}$. Für $i > r$ gilt $F(v'_i) = 0$ (da sie im Kern von F liegen) und $v'_i = e_i^{\mathcal{A}}$. Für die Matrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F)$ muss also gelten, dass der Einheitsvektor $e_i^{\mathcal{A}}$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$ auf den Einheitsvektor $e_i^{\mathcal{B}}$ abgebildet wird, und für $i > r$ auf 0. Diese Matrix ist aber genau diejenige, welche gesucht ist.

Im Gegensatz zur Aufgabe **5 d)** dürfen hier die Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ unterschiedlich sein. Deshalb ist das kein Widerspruch.