Tom Ilmanen

Musterlösung 12

1. a) Wir suchen eine 2×2-Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so dass $SA = BS$ gilt. Einsetzen der Einheitsvektoren ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\lambda)a + 3b, \\ 0 &= 3a + (1-\lambda)b, \\ 0 &= (1-\mu)c + 3d, \\ 0 &= 3c + (1-\mu)d. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass je 2 Gleichungen unabhängig von den anderen sind und die beiden Gleichungspaare bis auf Umbenennung der Variabeln komplett identisch sind. Also beschäftigen wir uns zuerst nur mit den ersten beiden Gleichungen. Man sieht aus der ersten Gleichung sofort, dass a genau dann null ist, wenn auch b null ist. Offensichtlich können aber nicht beide verschwinden, denn sonst erhalten wir eine Matrix S von nicht vollem Rang, und somit keine Basis. Folglich gilt $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Also muss λ so gewählt werden, dass das Gleichungssystem eine nicht-triviale Lösung besitzt. Durch auflösen nach a, einsetzen in die andere Gleichung und dividieren durch b (denn b ist ja nicht null !) erhält man die Gleichung $9 = (1-\lambda)^2$, also $\lambda \in \{-2, 4\}$. Wir fahren mit $\lambda = -2$ und $\mu = 4$ fort, d.h.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Falls wir nämlich $\lambda = \mu$ wählen, so ist S nicht von Rang 2, was wir aber benötigen.

Einsetzen dieser Werte ergibt $a = -b$ und $c = d$. Mit der kanonischen Wahl $a = c = 1$ ist

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und man prüft leicht nach, dass $SA = BS$ gilt. Eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist nun gegeben durch $w_1 = S^{-1}e_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ und $w_2 = S^{-1}e_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

b) Die so konstruierte Matrix S erfüllt genau die Eigenschaft von T.

c) Mit $T := S$ folgt aus $BT = TA$ sofort $B = TAT^{-1}$. Wir führen die Rechnung dennoch kurz aus:

$$\begin{aligned} TAT^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

d) Man kann sich das Resulat aus **c)** auch wie folgt vorstellen: Die Matrix T beschreibt den Koordinatenwechsel, das heisst sie verwandelt einen Vektor in Standardbasis in den gleichen Vektor bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Wenn wir nun die Abbildung B bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ berechnen wollen, ist das genau das Gleiche, wie wenn wir einen Vektor bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ nehmen, diesen zuerst mittels T^{-1} in die Standardbasis umschreiben, dann A anwenden und den resultierenden Vektor mit T wieder zurück in die Basis $\mathcal{B}$ transformieren. Wir haben also $B = T \circ A \circ T^{-1} = TAT^{-1}$. Man kann diese Aussage auch als das folgende kommutierende Diagramm schreiben:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "T"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "T"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

2. Wir rechnen

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt $\operatorname{Kern} F \subseteq \operatorname{Kern} F^2 = \operatorname{Span}\{(1,0,-1),(2,1,0)\}$. Wähle $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Kern} F^2$, z. B. $u = (1,0,0)$. Dann werden $v = F(u) = (2,1,0)$ und $w = F(v) = (6,4,2)$. Ausserdem gilt $F(w) = 0$. Beachte, dass $\big(u,v,w\big)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Die Matrix von F bezüglich $\big(u,v,w\big)$ lautet

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Sei $E_{ij} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Matrix, die an der Stelle (i,j) den Eintrag 1 und überall sonst den Eintrag 0 hat. Nach Voraussetzung gilt $AE_{ij} = E_{ij}A$ für alle $1 \leq i,j \leq n$. Betrachten wir nun diese Gleichung für $1 \leq i,j \leq n$ fest: AE_{ij} besteht aus lauter Nullen, bis auf die j-te Spalte, die gleich dem Vektor $(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})^\top$ ist. $E_{ij}A$ besteht aus lauter Nullen, bis auf die i-te Zeile, die gleich dem Vektor $(a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$ ist. Die Gleichheit aller Einträge der Matrix ergibt nun

$$a_{ii} = a_{jj} \text{ und } a_{ki} = 0 \;\forall\; k \neq i, \quad a_{jk} = 0 \;\forall\; k \neq j.$$

Dies können wir für alle $1 \leq i,j \leq n$ durchführen und dies ergibt

$$a_{ij} = 0 \;\forall\; i \neq j \text{ und } a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}.$$

Also muss A die Form $\lambda E_n, \lambda \in \mathbb{K}$ haben.

4. a) Wir betrachten die Matrizen als lineare Abbildungen. Das ergibt ein Diagramm

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{B} \mathbb{K}^n \xrightarrow{A} \mathbb{K}^n$$

Weiter definieren wir $F := A|_{\operatorname{Im} B}$. Dann ist $\operatorname{Im} AB = \operatorname{Im} F$ und $\operatorname{Kern} F = \operatorname{Kern} A \cap \operatorname{Im} B$. Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt

$$\operatorname{Rang} AB = \operatorname{Rang} F = \dim \operatorname{Im} B - \dim \operatorname{Kern} F = \operatorname{Rang} B - \dim \operatorname{Kern} F. \quad (*)$$

Daraus folgt $\operatorname{Rang} AB \leq \operatorname{Rang} B$. Aus $\operatorname{Im} AB \subset \operatorname{Im} A$ folgt $\operatorname{Rang} AB \leq \operatorname{Rang} A$.
Wegen $\operatorname{Kern} F \subset \operatorname{Kern} A$ folgt aus $(*)$ weiter

$$\operatorname{Rang} AB \geq \operatorname{Rang} B - \dim \operatorname{Kern} A = \operatorname{Rang} B + \operatorname{Rang} A - n.$$

b) Zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Ja, dies wird zum Beispiel erreicht für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

5. a) Sei k die kleinste natürliche Zahl, so dass $A^k = 0$ gilt. Dann gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{K}^2$, so dass $A^{k-1}v \neq 0$ ist. Da A eine lineare Abbildung beschreibt, haben wir nun die Voraussetzungen für die Aufgabe 1 der Serie 10 erfüllt und wissen, dass $v, Av, \ldots, A^{k-1}v$ linear unabhänging sind. Da wir in dieser Aufgabe aber in $\mathbb{K}^2$ arbeiten, muss $k \leq 2$ gelte, da höchstens 2 Vektoren linear unabhängig sein können. Damit gilt schon einmal $A^2 = 0$.

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle $k = 1$ und $k = 2$. Sei zuerst $k = 1$. Dann ist $A^1 = 0$, und egal welche Basis $\mathcal{B}$ wir wählen, $M_{\mathcal{B}}(A) = TAT^{-1} = 0$. Im Fall $k = 2$ sind v und Av linear unabhängig, und wir wählen als Basis die Vektoren (Av, v) mit Basiswechselmatrix T. Es gilt nun $TAv = (1, 0)$ in der neuen Basis und $TA(Av) = TA^2v = T0v = 0$. Andererseits ist $Tv = (0, 1)$ und wieder $TAv = (1, 0)$, d.h. die Matrix $M_{(Av,v)}(A)$ muss den ersten Einheitsvektor auf 0 schicken und den zweiten auf $(1, 0)$. Die Matrix, die das macht, ist genau $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Wir verfahren ähnlich wie in der vorherigen Teilaufgabe und unterscheiden nach dem Rang von A. Falls dieser 0 ist, so ist $A = 0$ und keine Basiswechselmatrix kann daran etwas ändern. Andernfalls gibt es ein $0 \neq v \in \operatorname{Bild} A$. Für dieses v gilt nun $Av = v$, da $v = Au$ für ein $u \in \mathbb{K}^2$.

Falls A den Rang 1 hat, so ergänzen wir v zu einer Basis (v, w) mit $w \in \operatorname{Kern} A$. Sei T die Basiswechselmatrix. Es gilt nun $TAv = Tv = (1, 0)$ und $TAw = T \cdot 0 = 0$ in der neuen Basis, und gleichzeitig haben wir $Tv = (1, 0)$, $Tw = (0, 1)$. Die induzierte Matrix von A bezüglich der neuen Basis bildet also $(1, 0) \mapsto (1, 0)$ und $(0, 1) \mapsto 0$ ab, also hat sie die gewünschte Form.

Falls A den Rang 2 hat, so ist $(A^{-1}e_1, A^{-1}e_2)$ eine Basis mit Basiswechselmatrix A. Es gilt dann $A^2e_1 = Ae_1 = (1, 0)$ und $A^2e_2 = Ae_2 = (0, 1)$ jeweils in der neuen Basis. Die Abbildungsmatrix von A bezüglich der neuen Basis bildet also die Einheitsvektoren auf sich selbst ab und ist somit die Identität.

6. a) Die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \iota \ : \ X(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &\longmapsto a + ib \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen, und es gilt

$$\iota(AB) = \iota(A)\iota(B) \quad \forall\, A, B \in X(\mathbb{R}).$$

b) $X(\mathbb{C})$ ist kommutativ, da man in

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

a mit c und b mit d vertauschen darf, ohne dass sich die Matrix ändert. $X(\mathbb{C})$ ist allerdings nicht nullteilerfrei, wie man z.B. an

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = 0$$

sieht. Auch gibt es nicht immer multiplikative Inverse: Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat keine Lösung.

c) Ist $X(\mathbb{K})$ wieder ein Körper, so setzen wir $\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{X(\mathbb{K})}$, $\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{X(\mathbb{K})}$ und $\mathbf{i} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. In $X\big(X(\mathbb{K})\big)$ gilt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & \mathbf{1} \end{pmatrix}}_{\neq 0_{X(X(\mathbb{K}))}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{i} \\ -(-\mathbf{i}) & \mathbf{1} \end{pmatrix}}_{\neq 0_{X(X(\mathbb{K}))}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{= 0_{X(X(\mathbb{K}))}} .$$

Die Struktur $\big(X\big(X(\mathbb{K})\big), +, \cdot\big)$ ist also kein Körper.