Musterlösung 13

1. Es gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist invertierbar} &\Leftrightarrow L_A \text{ ist ein Isomorphismus} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A) = 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ sind linear unabhängig} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq 0, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow ad - bc \neq 0. \end{aligned}$$

Falls $ad - bc \neq 0$ kann man direkt nachrechnen, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \operatorname{tr}(A) \cdot A + \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = \operatorname{tr}(A) \cdot A - \det A \cdot I.$$

Also erfüllen $\lambda = -\det A$, $\mu = \operatorname{tr}(A)$ die Bedingungen.

b)

$$\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(A) \cdot A) - \operatorname{tr}(\det A \cdot I) = (\operatorname{tr}(A))^2 - 2\det A.$$

c) Offenbar ist $I \in \operatorname{Alg}(A)$ genau dann wenn $\det(A) \neq 0$, und andernfalls gilt $A^2 = \operatorname{tr}(A) \cdot A$, d.h. die Matrizen hängen voneinander ab. Auch im Fall $\det(A) \neq 0$ wissen wir bereits, dass A, A^2 und I voneinander abhängen, und es reicht, zwei Matrizen davon zu betrachten. Die lineare Abhängigkeit der dritten Matrix ergibt sich dann sofort aus (†). Am einfachsten prüft man die Abhängigkeit offensichtlich mit I und A, und es muss trivialerweise $A = \xi I$ gelten. Dann ist $\det A = \xi^2$ und $\operatorname{tr}(A) = 2\xi$, und man überprüft leicht, dass

$$(\xi I)^2 = 2\xi(\xi I) - \xi^2 I$$

gilt.

Zusammenfassend hat $\operatorname{Alg}(A)$ die Dimension 1, wenn $A \neq 0$ und zusätzlich entweder $\det A = 0$ oder $A = \xi I$ gilt.

Bitte wenden!

3. **a)** Dies ist ein einfaches Nachrechnen.

b) Die erste Gleichung lässt sich durch nachrechnen überprüfen. Es folgt dann $\widetilde{A\widetilde{A}} = \widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A} = A\widetilde{A}$, und die letzte Gleichung folgt wieder durch nachrechnen. Für die mittlere Gleichung verwenden wir

$$|AB|^2\mathbb{1} = AB\widetilde{AB} = A\underbrace{B\widetilde{B}}_{|B|^2\mathbb{1}}\widetilde{A} = |B|^2|A|^2\mathbb{1}.$$

Da die Zahlen $|AB|, |A|, |B|$ alle nicht-negativ sind, muss also die Gleichung $|AB| = |A||B|$ gelten.

c) Aus der letzten Gleichung der vorherigen Aufgabe ergibt sich sofort

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{|A|^2}.$$

d) $A^2 = -\mathbb{1}$ gilt genau dann wenn $A = -A^{-1} = -\frac{\widetilde{A}}{|A|^2}$ und $|A|^2 = |A^2| = 1$. Es folgt, dass

$$A = -\widetilde{A}, \qquad |A| = 1$$

gelten muss und diese Bedingungen äquivalent zu $A^2 = -\mathbb{1}$ sind. Dies lässt sich aber nun an den Koeffizienten ablesen: Die erste Gleichung sagt $t = 0$, die zweite $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Die Lösungsmenge spannt also ein zweidimensionale Kugel im vierdimensionalen Raum auf.

4. **a)** a hat genau dann eine Inverse x in $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, wenn $ax \equiv 1 \mod b \iff ax - 1 \equiv 0 \mod b \iff ax - 1 = by$ für ein $y \in Z$, d.h. genau dann wenn $ax + by = 1$ möglich ist.

b) Da die Determinante multiplikativ ist, muss für eine invertierbare Matix A gelten:

$$1 = \det \mathbb{1} = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$

Insbesondere muss also $\det(A) = ad - bc$ invertierbar sein in $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$. Gleichzeitig ist dies aber auch hinreichend, da dann die übliche Formel tatsächlich eine Inverse gibt, wie man durch Nachrechnen überprüfen kann.

c)
```
function inv=invert(A)
% Invertiert eine 2x2-Matrix in Z/26Z, falls dies moeglich ist.
    [d,x] = gcd(det(A),26);
    if d ~= 1
        inv = zeros(2);
        disp(sprintf('Matrix nicht invertierbar!'));
```

Siehe nächstes Blatt!

```
else
    inv = mod(x * [ A(2,2) -A(1,2); -A(2,1) A(1,1)],26);
end;
```

5. a) Es gilt

$$C = \big(b_1 a \ \ldots \ b_m a\big).$$

Falls alle a_i oder alle b_j null sind, so ist der Rang offensichtlich auch 0. Andernfalls wählen wir ein $b_{j_0} \neq 0$ und addieren für $j = 1, \ldots, n, j \neq j_0$ zur der j-ten Spalte genau $b_{j_0} - b_j$ mal die j_0-te Spalte. Dadurch verändern wir den Rang nicht, erhalten aber die modifizierte Matrix

$$\widetilde{C} = \big(b_{j_0} a \ \ldots \ b_{j_0} a\big).$$

Diese Matrix hat offensichtlich Spaltenrang 1. Also können die Ränge 0 und 1 auftreten.

b) Falls $C = 0$ so ist der Kern offensichtlich ganz $\mathbb{R}^m$ und das Bild ist $\{0\}$.

Andernfalls wählen wir wieder ein j_0 mit $b_{j_0} \neq 0$ und betrachten den Einheitsvektor der j_0-ten Koordinate. Er wird auf $b_{j_0} a$ abgebildet. Da der Rang von C in diesem Fall genau 1 ist, die das Bild von C also eindimensional, d.h. $\operatorname{Bild} C = \operatorname{Span}(a)$. Diese Überlegung hilft uns auch, den Kern zu bestimmen: Ein Vektor $(x_1, \ldots, x_n)$ wird nämlich auf $(b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n)a$ abgebildet und ist somit genau dann im Kern von C, falls

$$b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n = 0.$$