Lösungsskizze zur Serie 14

1. **a)** Die Matrix A kann durch Zeilenumformungen auf die Form

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gebracht werden. Die Matrix A' hat offensichtlich Zeilenrang 4, also auch Rang 4. Da der Rang einer Matrix invariant unter Zeilenumformungen ist, hat auch A Rang 4.

b) Diese Matrix hat Rang 1.

2. Die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. **a)** Jede lineare Abbildung von V nach $\mathbb{R}$ kann als 1×3 - Matrix dargestellt werden. Deshalb ist V^* isomorph zum Raum der 1×3 - Matrizen, hat also Dimension 3. Man sieht auch leicht, dass ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 linear unabhängig sind. Somit bilden sie eine Basis von V^*.

b) $\phi_4 = 2\,\phi_1 - \frac{2}{3}\,\phi_2 + \frac{2}{3}\,\phi_3$.

Bitte wenden!

Lösungsskizze zu den Spass- und Repetitionsaufgaben

4. Sei
$$\sum_{s\in S} \lambda_s s = 0 \qquad (\lambda_s \neq 0 \text{ nur für endlich viele } s \in S).$$
Gäbe es $t \in S$ mit $\lambda_t \neq 0$, so wäre
$$t = -\lambda_t^{-1} \sum_{s\in S-\{t\}} \lambda_s s$$
und somit $\mathrm{Span}\,(S - \{t\}) = \mathrm{Span}\,(S) \overset{\text{(i)}}{=} V$. Dies widerspricht (ii). Somit gilt $\lambda_s = 0$ für alle $s \in S$, d. h. S ist linear unabhängig. Weil S gemäss (i) auch V aufspannt, ist S eine Basis von V.

5. Sei $\mathcal{B}(k, j)$ die Menge der linear unabhängigen j-Tupel von Vektoren in $(\mathbb{F}_2)^k$. Die Anzahl der n-dimensionalen Unterräume von $(\mathbb{F}_2)^N$ ist dann $\frac{|\mathcal{B}(N,n)|}{|\mathcal{B}(n,n)|}$, denn jeder solche Unterraum lässt sich schreiben als $\mathrm{Span}\,(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ für $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \in \mathcal{B}(N, n)$, und derselbe Unterraum kommt auf diese Weise $|\mathcal{B}(n, n)|$ mal vor $\big($Wahl einer geordneten Basis von $\mathrm{Span}\,(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \cong (\mathbb{F}_2)^n\big)$.

Behauptung: $|\mathcal{B}(k, j)| = \prod_{l=0}^{j-1} (2^k - 2^l)$ für $0 \leq j \leq k$.

Beweis: mit Induktion nach j für fixiertes k.

$j = 0 :$ ✓

$j \rightsquigarrow j + 1 :$ Es gilt

$$\mathcal{B}(k, j{+}1) = \left\{(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j, \vec{v}) \,\middle|\, (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j) \in \mathcal{B}(k, j),\ \vec{v} \in (\mathbb{F}_2)^k \setminus \mathrm{Span}\,(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j)\right\},$$

also

$$|\mathcal{B}(k, j{+}1)| = \sum_{(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_j)\in\mathcal{B}(k,j)} \left|(\mathbb{F}_2)^k \setminus \mathrm{Span}\,(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j)\right| = |\mathcal{B}(k, j)| \cdot (2^k - 2^j) = \prod_{l=0}^{j} (2^k - 2^l).$$

Die Anzahl der n-dimensionalen Unterräume von $(\mathbb{F}_2)^N$ beträgt somit

$$\prod_{l=0}^{n-1} \frac{2^N - 2^l}{2^n - 2^l} = \frac{\prod_{l=1}^{N} (2^l - 1)}{\prod_{l=1}^{n} (2^l - 1) \cdot \prod_{l=1}^{N-n} (2^l - 1)}.$$

Siehe nächstes Blatt!

6. Alle drei Abbildungen sind linear, denn für f, g aus den entsprechenden Funktionenräumen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Rechnungen.

a) $$\big(\lambda f+\mu g\big)(0)+\int_{-1}^{1}\big(\lambda f+\mu g\big)(x)\, e^{x^2}\, dx = \lambda f(0)+\mu g(0)+\int_{-1}^{1}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)\, e^{x^2}\, dx$$
$$= \lambda\left(f(0) + \int_{-1}^{1} f(x)\, e^{x^2}\, dx\right) + \mu\left(g(0) + \int_{-1}^{1} g(x)\, e^{x^2}\, dx\right)$$

b) $x\,\big(\lambda f + \mu g\big)(1/x) = x\lambda f(1/x) + x\mu g(1/x) = \lambda\big(xf(1/x)\big) + \mu\big(xg(1/x)\big)$

c) Für $h \in C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist

$$\int_{h(0)-\frac{\pi}{2}}^{h(0)+\frac{\pi}{2}} h(2x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{2h(0)-\pi}^{2h(0)+\pi} h(y)\, dy = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} h(y)\, dy = \int_{0}^{\pi} h(2x)\, dx.$$

Somit
$$\int_{(\lambda f+\mu g)(0)-\frac{\pi}{2}}^{(\lambda f+\mu g)(0)+\frac{\pi}{2}} \big(\lambda f+\mu g\big)(2x)\, dx = \lambda\int_{0}^{\pi} f(2x)\, dx+\mu\int_{0}^{\pi} g(2x)\, dx = \lambda\int_{f(0)-\frac{\pi}{2}}^{f(0)+\frac{\pi}{2}} f(2x)\, dx +$$
$$\mu\int_{g(0)-\frac{\pi}{2}}^{g(0)+\frac{\pi}{2}} g(2x)\, dx.$$

7. Sei $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ eine Basis von V. Da $\mathrm{Span}\,(e_i)$ invariant unter f ist, gilt $f(e_i) = \lambda_{e_i} e_i$ und die Matrix von f ist somit diagonal. Es bleibt zu zeigen, dass die Diagonalelemente $\lambda_{e_1}, \ldots, \lambda_{e_n}$ paarweise gleich sind. Sei $v = \sum_i v_i e_i \in V$ mit $v_i \neq 0$ für alle i fest. Wir haben
$$f(v) = \sum_i \lambda_{e_i} v_i e_i$$

Gleichzeitig ist $\mathrm{Span}\,(v)$ invariant unter f, also

$$f(v) = \lambda_v v = \lambda_v \sum_i v_i e_i = \sum \lambda_v v_i e_i.$$

Damit das erfüllt ist, muss gelten, dass

$$\lambda_{e_i} = \lambda_v \qquad \forall i.$$

Somit ist $f = \lambda_v \cdot \mathrm{Id}$ (v haben wir fest gewählt).

Bitte wenden!

8. Zeilenoperationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c^2-ac-bc+ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{pmatrix}$$

Wegen $a \neq b \neq c \neq a$ ist der Rang 3. (Wir haben dabei nicht benutzt, dass $a, b, c \in \mathbb{C}$. Eine (billige) Verallgemeinerung ist also dieselbe Aussage für beliebige Körper.)

Satz Es seien $a_1, \dots, a_n$ paarweise verschiedene Elemente eines Körpers K. Dann ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

regulär.

Erster Beweis. Man zeigt analog wie im Fall einer 3×3-Matrix, dass

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & * \\ & a_2 - a_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \prod_{i=1}^{k-1}(a_k - a_i) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i) \end{pmatrix}.$$

Zweiter Beweis. Man zeigt, dass das Gleichungssystem

$$(T_0 \ \dots \ T_{n-1})A = 0 \qquad (*)$$

nur die triviale Lösung hat: Für $T_0, \dots, T_{n-1} \in K$ ist das Polynom

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} T_i \, x^i$$

ein Polynom vom Grad $\leq n-1$. Nach Voraussetzung $(*)$ gilt

$$p(a_i) = 0 \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir haben also ein Polynom vom Grad $\leq n-1$ mit n verschiedenen Nullstellen über einem Körper. Bekanntlich (siehe Skript Kap. VI Lemma 2.2) ist dann $p(x)$ das Nullpolynom, d. h. $T_0 = \cdots = T_{n-1} = 0$. Das Gleichungssystem $(*)$ hat also nur die triviale Lösung, d. h. die Matrix A ist regulär.

9. **a)** Sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl so, dass $N^k = 0$. Dann haben wir die Kette von Unterräumen

$$K^n \underset{\neq}{\supseteq} N(K^n) \underset{\neq}{\supseteq} N^2(K^n) \underset{\neq}{\supseteq} \cdots \underset{\neq}{\supseteq} N^k(K^n) = 0.$$

(Beachte: $N^j(K^n) = N^{j+1}(K^n) \implies N^j(K^n) = N^{j+1}(K^n) = N^{j+2}(K^n) = \cdots$.)
Für die Dimensionen gilt

$$n > \dim N(K^n) > \dim N^2(K^n) > \cdots > \dim N^k(K^n) = 0,$$

also $k \leq n$. Folglich ist $N^n = N^k N^{n-k} = 0$.

b) Gilt $N^m = 0$ (für ein $m > 0$), so rechnet man sofort nach, dass $\sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j N^j$ die Inverse Matrix zu $E + N$ ist.

10. **a)** Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man sieht leicht, dass φ eine lineare Abbildung ist. Zudem ist $\varphi^{n-1}(x) = \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\varphi^n(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Für ein allgemeines $2 \leq k \leq n$ können wir zum Beispiel die folgende Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten:

Bitte wenden!

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ x_1 \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Auch hier sieht man leich, dass ϕ eine lineare Abbildung ist mit

$$\phi^l(x) = \begin{pmatrix} x_{l+1} \\ \vdots \\ x_k \\ x_1 \\ \vdots \\ x_l \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ für } 2 \le l \le k-1 \quad \text{und} \quad \phi^k(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

11. $a \neq c$: Induktion über m. Für $m = 1$ stimmt die Formel.

$m \mapsto m+1$:

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{m+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^m \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^m & b\frac{a^m-c^m}{a-c} \\ 0 & c^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a^{m+1} & a^m b + b\frac{a^m-c^m}{a-c}c \\ 0 & c^{m+1} \end{pmatrix},$

und $a^m b + b\frac{a^m-c^m}{a-c}c = \frac{a^{m+1}b-a^m bc+ba^m c-bc^{m+1}}{a-c} = b\frac{a^{m+1}-c^{m+1}}{a-c}$.

$a = c$: Die Formel für $a = c$ ist $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} a^m & ma^{m-1}b \\ 0 & a^m \end{pmatrix}$,

betrachte wieder $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{m+1} = \begin{pmatrix} a^m & ma^{m-1}b \\ 0 & a^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{m+1} & x \\ 0 & a^{m+1} \end{pmatrix}$,
mit $x = a^m b + ma^m b = (m+1)a^m b$.

12. a) Um zu zeigen, dass $\mathcal{B} := \{\sin, \cos, \sin\cdot\cos, \sin^2, \cos^2\}$ eine Basis von V ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{B} := \{\sin, \cos, \sin\cdot\cos, \sin^2, \cos^2\}$ linear unabhängig

Siehe nächstes Blatt!

ist. Seien also $\lambda_1, ..., \lambda_5 \in \mathbb{R}$, so dass

$\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 \sin x \cdot \cos x + \lambda_4 \sin^2 x + \lambda_5 \cos^2 x = 0$ für alle$x \in \mathbb{R}$.

Wir setzen nun verschiedene Werte für x ein.

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad \lambda_2 + \lambda_5 &= 0 \\ x = \pi/2: &\quad \lambda_1 + \lambda_4 &= 0 \\ x = \pi: &\quad -\lambda_2 + \lambda_5 &= 0 \\ x = 3\pi/2: &\quad -\lambda_1 + \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Schliesslich gilt zum Beispiel für $x = \pi/3$, dass $\sin x \cdot \cos x \neq 0$, also auch $\lambda_3 = 0$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \sin' &= \cos \\ \cos' &= -\sin \\ (\sin \cdot \cos)' &= \cos^2 - \sin^2 \\ (\sin^2)' &= 2 \sin \cdot \cos \\ (\cos^2)' &= -2 \sin \cdot \cos\,. \end{aligned}$$

Also erhalten wir die folgende Abbildungsmatrix A von D bezüglich $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\text{Kern } A = \{t(0,0,0,1,1)^\top \in \mathbb{R}^5 \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5,$$

$$\text{Bild } A = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Daraus ergibt sich

$$\text{Kern } D = \text{Span}(\sin^2 + \cos^2) \subseteq V$$

und

$$\text{Bild } D = \text{Span}(\sin, \cos, \sin \cdot \cos, \sin^2 - \cos^2).$$

Bitte wenden!

13. a) Sei $x = (x_1, x_2)^\top$ ein Vektor mit Einträgen aus $\mathbb{Z}_{26}$. x entspricht also einem zu kodierenden Buchstabenpaar. Nun bilden wir den numerischen Codevektor Ax. Falls eine Matrix $B \in M(2 \times 2, \mathbb{Z}_{26})$ existiert mit $BA = I_{2\times 2}$, so können wir durch Anwendung von B den Codevektor Ax decodieren, da $B(Ax) = (BA)x = x$.

b) Durch gewöhnliches Auflösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & \dots & 1 & 0 \\ 2 & 3 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Inverse

$$\tilde{B} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Divison mit 3 entspricht Multiplikation mit 9 in $\mathbb{Z}_{26}$. Also erhalten wir

$$B = \tilde{B} \pmod{26} = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}.$$

c) FROHE WEIHNACHTEN!