Musterlösung 2

1. Um zu zeigen, dass eine Abbildung eine Eigenschaft nicht besitzt, reicht es aus, ein einziges Gegenbeispiel zu geben. Soll gezeigt werden, dass eine Abbildung z.B. injektiv ist, muss das anhand der Definition von Injektivität für alle Elemente des Definitionsbereiches nachgewiesen werden.

a) f_1 ist nicht injektiv, denn $f_1(1,0) = f_1(0,1) = 1$, aber $(1,0) \neq (0,1)$. D.h. zwei verschiedene Elemente aus der Definitionsmenge werden auf dasselbe Element der Wertemenge abgebildet.

f_1 ist surjektiv, denn für alle $r \in \mathbb{R}$ ist $(r,0) \in \mathbb{R}^2$ und $f_1(r,0) = r + 0 = r$; jedes Element der Bildmenge wird also "getroffen".

b) f_2 ist injektiv: Sei $(x_1 + 2y_1, 2x_1 - y_1) = (x_2 + 2y_2, 2x_2 - y_2)$.

Daraus folgt

$$\begin{array}{rlll} & x_1 + 2y_1 = x_2 + 2y_2 & \text{und} & 2x_1 - y_1 = 2x_2 - y_2 \\ \Rightarrow & x_1 = x_2 + 2y_2 - 2y_1 & \text{und} & 2(x_2 + 2y_2 - 2y_1) - y_1 = 2x_2 - y_2 \\ \Rightarrow & x_1 = x_2 + 2y_2 - 2y_1 & \text{und} & y_1 = y_2 \\ \Rightarrow & x_1 = x_2 & \text{und} & y_1 = y_2 \\ \Rightarrow & (x_1, y_1) = (x_2, y_2) & & \end{array}$$

f_2 ist auch surjektiv: Ein beliebiges Element $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ hat stets ein Urbild, nämlich $(\frac{1}{5}\lambda + \frac{2}{5}\mu, \frac{2}{5}\lambda - \frac{1}{5}\mu)$, wie man durch Nachrechnen bestätigen kann.

c) f_3 ist nicht injektiv, denn für zwei Polynome $p(x)$ und $q(x) = p(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt $p'(x) = q'(x)$.

f_3 ist jedoch surjektiv, denn für jedes Polynom $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ gilt $P'(x) = p(x)$ für das Polynom $P(x) = a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \frac{1}{3}a_2 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}a_n x^{n+1}$.

2. Es gilt $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$ und $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

a) Wahr, denn für alle $a \in A$ gilt: $b := f(a)$ liegt in $f(A)$ und $a \in f^{-1}(b)$. Somit ist a in $f^{-1}(f(A))$.

b) Falsch: Betrachte beispielsweise $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, und $A = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Dann ist $f(A) = A$, aber $f^{-1}(A) = \mathbb{R}$!

Bitte wenden!

c) Wahr: Die Inklusion “$\subset$” wurde in Teilaufgabe a) gezeigt. Die Inklusion “$\supset$” ergibt sich aus der Tatsache, dass die Urbilder bei injektiven Funktionen eindeutig sind ($f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$), also gibt es für jedes Element $b \in f(A)$ genau ein Element in $a \in A$ mit $f(a) = b$.

d) Wahr: Sei $a \in f^{-1}(B)$. Dann gilt per Definition von $f^{-1}(B)$, dass $f(a) \in B$. Deshalb gilt für jedes $b \in f(f^{-1}(B))$ auch $b \in B$.

e) Falsch: Betrachte beispielsweise $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ und $B = [0, 1]$. Dann gilt $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$ und somit $f(f^{-1}(B)) = f(\mathbb{R}) = \{0\} \neq B$.

f) Wahr: Die Inklusion “$\supset$” wurde in Teilaufgabe d) gezeigt. Wir müssen also noch die Inklusion “$\subset$” zeigen: Sei $b \in B$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $a \in X$, sodass $f(a) = b$. Dies impliziert jedoch, dass $a \in f^{-1}(B)$ ist und somit gilt $b \in f(f^{-1}(B))$.

3. a) Das erste Element von A hat 8 Plätze zur Auswahl, das zweite 7, das dritte Element 6, das vierte noch 5 und das fünfte hat 4 Plätze zur Auswahl, also gibt es $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ injektive Abbildungen von A nach B.

b) Die Anzahl der Abbildungen einer n-elementigen Menge in eine Menge mit k Elementen ist k^n.

Wenn wir alle 5^8 Abbildungen von B nach A rechnen, so haben wir einige gezählt, die nicht surjektiv sind, nämlich alle diejenigen, die nur auf vier Elemente von A abbilden.

Da es $\binom{5}{4}$ Möglichkeiten gibt, 4 Elemente aus 5 auszuwählen und es 4^8 Abbildungen von B in eine 4-elementige Menge gibt, müssen $\binom{5}{4} \cdot 4^8$ Abbildungen abgezählt werden.

Zählt man alle Abbildungen auf 4 Elemente von A, so wird jede Abbildung auf nur 3 Elemente von A doppelt gezählt: Nenne a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 die Elemente von A. Sind $A_1 := \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ und $A_2 := \{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ zwei 4-elementige Teilmengen, so sind die Abbildungen nach der 3-elementigen Teilmenge $\{a_2, a_3, a_4\}$ sowohl Abbildungen nach A_1 als auch A_2, sie werden also doppelt gezählt.

Daher muss zu $5^8 - \binom{5}{4} \cdot 4^8$ noch die Anzahl Abbildungen auf alle möglichen drei-elementigen Mengen, also $\binom{5}{3} \cdot 3^8$, gezählt werden.

Ähnlich geht es mit den Abbildungen auf 2 Elemente: die wurden bei den Abb. auf 4 Elemente doppelt abgezählt und bei den Abbildungen auf drei Elemente dreifach dazugezählt. Daher muss einmal die Anzahl Abbildungen auf 2-elementige Menge, also $\binom{5}{2} \cdot 2^8$, abgezählt werden.

Analog für die Abbildunge auf ein Element, es bleibt, einmal die Anzahl auf 1-elementige Mengen, also $\binom{5}{1} \cdot 1^8$, dazuzuzählen.

Siehe nächstes Blatt!

Insgesamt ist die Anzahl surjektiver Abbildungen $B \to A$:

$$5^8 - \binom{5}{4} \cdot 4^8 + \binom{5}{3} \cdot 3^8 - \binom{5}{2} \cdot 2^8 + \binom{5}{1} \cdot 1^8 = 126\,000.$$

Eine andere Möglichkeit ist, rekursiv zu rechnen: Sei $Surj(n,k)$ die Menge der surjektiven Abbildungen einer n-elementigen Menge in eine k-elementige Menge. Nun kann $Surj(n,k)$ zerlegt werden in diejenigen Abb. von $n-1$ Elementen aus, die immer noch surjektiv sind, also $Surj(n-1,k)$, und die Abb. von $n-1$ Elementen aus, die nicht mehr surjektiv sind. Diese sind aber surjektiv auf $k-1$ Elemente, also $Surj(n-1,k-1)$.

$$\begin{aligned}
Surj(n,k) &= k \cdot (Surj(n-1,k) + Surj(n-1,k-1)) \\
&= k^2 \cdot (Surj(n-2,k) + Surj(n-2,k-1)) \\
&\quad + k(k-1) \cdot (Surj(n-2,k-1) + Surj(n-2,k-2)) \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

Hinweis: die Anzahl surjektiver Abbildungen von n nach k Elementen ist $k! \cdot S_{n,k}$, wobei $S_{n,k}$ die Stirlingschen Zahlen zweiter Ordnung sind. Diese Zahlen finden sich in Buechern zur Kombinatorik, z.B. M. Aigner, Kombinatorik I, Springer 1975, p. 141 und Tabelle p. 157 (ergibt $5! \cdot 1050$, also $126\,000$).

4. Es wird jeweils nur die eine Behauptung gezeigt, da die Beweise recht ähnlich sind.

a) f und g seien injektiv, dann gilt: $g \circ f$ ist injektiv. Es ist zu zeigen ist, dass aus $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ folgt,dass $x_1 = x_2$.
Aus $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ folgt $f(x_1) = f(x_2)$, da g injektiv ist. Daraus folgt wiederum $x_1 = x_2$, da f injektiv ist.

b) Sei $g \circ f$ surjektiv, dann ist auch g surjektiv. Zu zeigen ist: jedes beliebige $z \in Z$ wird durch g "getroffen".
Sei $z \in Z$ beliebig. Da $g \circ f$ surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ und $y := f(x) \in Y$, also ist $g(y) = z$.

5. Aus dem gegebenen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrl}
1\,x_1 & +\ 3\,x_2 & -\ 4\,x_3 = & 0 \\
3\,x_1 & +\ 7\,x_2 & -\ 2\,x_3 = & 0 \\
6\,x_1 & +16\,x_2 & -14\,x_3 = & 0
\end{array}$$

Bitte wenden!

erhalten wir ein äquivalentes System:

$$\begin{array}{rcrcrl} 1\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & 4\,x_3 = & 0 \\ & & 2\,x_2 & - & 10\,x_3 = & 0 \end{array}$$

und die allgemeine Lösung ist $(x_1, x_2, x_3) = (-11\lambda, 5\lambda, \lambda)$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

6. Hier ist nochmals das gegebene Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & ay & + & bz & = & 0 \\ ax & & & + & cz & = & 0 \\ bx & + & cy & & & = & 0. \end{array} \qquad (*)$$

- $a = 0$: $\exists$ nichttriviale Lösung, nämlich z. B.

$$(x, y, z) = \begin{cases} (-c, b, 0) & \text{falls } (b, c) \neq (0, 0), \\ (1, 0, 0) & \text{sonst.} \end{cases}$$

- $a \neq 0$: Wir erhalten das äquivalente System

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & \frac{b}{a}z & = & 0 \\ x & & & + & \frac{c}{a}z & = & 0 \\ & & cy & - & \frac{bc}{a}z & = & 0 \end{array}$$

und weiter

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & \frac{c}{a}z & = & 0 \\ & & y & + & \frac{b}{a}z & = & 0 \\ & & & - & \frac{2bc}{a}z & = & 0. \end{array}$$

$bc \neq 0$: Es gibt nur die triviale Lösung.
$bc = 0$: $\exists$ nichttriviale Lösung, z. B. $(x, y, z) = (c, b, -a)$.

Also:

$$\big\{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \;\big|\; (*) \text{ besitzt nur die triviale Lösung}\big\} = \big\{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \;\big|\; abc \neq 0\big\} = (\mathbb{C}^\times)^3.$$