Musterlösung 3

1. **a)** Falsch: Betrachte zum Beispiel die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und wähle $A = [-2, -1]$ und $B = [1, 2]$. Dann gilt $A \cap B = \emptyset$ und somit $f(A \cap B) = \emptyset$. Andererseits ist aber $f(A) = f(B) = [1, 4]$, also $f(A) \cap f(B) = [1, 4]$.

b) Wahr: Sei $x \in f(A \cup B)$. Dann existiert ein y in A oder B, sodass $f(y) = x$. Falls $y \in A$, dann ist $x \in f(A)$ und anderenfalls ist $x \in f(B)$. Insbesondere gilt also $x \in f(A) \cup f(B)$. Dies zeigt die Inklusion "$\subset$". Für die Inklusion "$\supset$" sei $x \in f(A) \cup f(B)$. Falls $x \in f(A)$, dann gibt es ein $y \in A$, sodass $f(y) = x$. Anderenfalls gibt es ein $y \in B$ mit $f(y) = x$. In jedem Fall findet man also ein $y \in A \cup B$ mit $f(y) = x$ und somit gilt $x \in f(A \cup B)$.

c) Wahr: Sei $x \in f^{-1}(C \cap D)$. Das bedeutet, dass es ein $y \in C \cap D$ gibt, sodass $f(x) = y$ gilt. Da y im Durchschnitt von C und D ist, liegt x sowohl im Urbild von C als auch in jenem von D. Dies zeigt die Inklusion "$\subset$". Für die Inklusion "$\supset$" sei $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Das heisst, es gibt ein $y_1 \in C$ mit $f(x) = y_1$ und es gibt ein $y_2 \in D$ mit $f(x) = y_2$. Das bedeutet aber natürlich, dass $y_1 = y_2$ und insbesondere liegt dieses Element in $C \cap D$.

d) Wahr: Sei $x \in f^{-1}(C \cup D)$. Dann existiert ein y in C oder D, sodass $f(x) = y$. Falls $y \in C$, dann ist $x \in f^{-1}(C)$ und anderenfalls ist $x \in f^{-1}(D)$. Insbesondere gilt also $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Dies zeigt die Inklusion "$\subset$". Für die Inklusion "$\supset$" sei $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Falls $x \in f^{-1}(C)$, dann gibt es ein $y \in C$, sodass $f(x) = y$. Anderenfalls gibt es ein $y \in D$ mit $f(x) = y$. In jedem Fall findet man also ein $y \in C \cup D$ mit $f(x) = y$ und somit gilt $x \in f^{-1}(C \cup D)$.

e) Falls f injektiv ist, dann ist auch a) wahr: Sei zuerst $x \in f(A \cap B)$. Dann existiert ein y in $A \cap B$, sodass $f(y) = x$. Da y in A und in B ist, liegt $x = f(y)$ in $f(A)$ und in $f(B)$, also in $f(A) \cap f(B)$. Dies zeigt die Inklusion "$\subset$". Für die Inklusion "$\supset$" sei $x \in f(A) \cap f(B)$. Es gibt also ein $y_1 \in A$ mit $f(y_1) = x$ und ein $y_2 \in B$ mit $f(y_2) = x$. Da f aber injektiv ist, gilt $y_1 = y_2$ und dieses Element liegt in $A \cap B$. Somit ist aber $x \in f(A \cap B)$.

2. **a)** In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Zeilenoperationen, welche zur Umwandlung des Gleichungssystems auf Zeilenstufenform benötigt werden, die Lö-

Bitte wenden!

sungsmenge nicht verändern. Es ist klar, dass die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

alle Lösungen des auf Zeilenstufenform gebrachten Systems beschreibt. Da sich die Lösungsmenge im Verlaufe der Umformung jedoch nicht verändert hat, beschreibt die Menge auch alle Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems.

b) Das kann man mit Hilfe der Definition direkt nachrechnen: Nehme an, dass $\Phi\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$. Wir wollen zeigen, dass daraus folgt, dass die Paare (t_1, t_2) und (s_1, s_2) gleich sind.

$$\begin{aligned}
&\Phi\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\; &\begin{pmatrix} -5/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\; &\begin{pmatrix} t_1/2 - t_2/2 \\ t_1 \\ -3t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1/2 - s_2/2 \\ s_1 \\ -3s_2 \\ s_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zwei Vektoren sind natürlich nur dann gleich, wenn all ihre Einträge gleich sind. Also erhält man zum Beispiel durch Vergleichen des zweiten und vierten Eintrages sofort, dass $t_1 = s_1$ und $t_2 = s_2$.

3. **a)** Seien $x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)^T$ und $x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right)^T$ zwei Lö-

Siehe nächstes Blatt!

sungen von (I). Wenn man ihre Differenz in (H) einsetzt, erhält man

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1^{(1)} - x_1^{(2)}) + \cdots + a_{1n}(x_n^{(1)} - x_n^{(2)}) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1^{(1)} - x_1^{(2)}) + \cdots + a_{mn}(x_n^{(1)} - x_n^{(2)}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1^{(1)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(1)} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1^{(1)} + \cdots + a_{mn}x_n^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11}x_1^{(2)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(2)} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1^{(2)} + \cdots + a_{mn}x_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $x^{(1)} - x^{(2)}$ eine Lösung von (H).

b) Sei $x^{(I)} = \left(x_1^{(I)}, x_2^{(I)}, \ldots, x_n^{(I)}\right)^T$ eine Lösung von (I) und sei $x^{(H)} = \left(x_1^{(H)}, x_2^{(H)}, \ldots, x_n^{(H)}\right)^T$ eine Lösung von (H). Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1^{(I)} + x_1^{(H)}) + \cdots + a_{1n}(x_n^{(I)} + x_n^{(H)}) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1^{(I)} + x_1^{(H)}) + \cdots + a_{mn}(x_n^{(I)} + x_n^{(H)}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1^{(I)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(I)} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1^{(I)} + \cdots + a_{mn}x_n^{(I)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}x_1^{(H)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(H)} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1^{(H)} + \cdots + a_{mn}x_n^{(H)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

und deshalb ist $x^{(I)} + x^{(H)}$ wieder eine Lösung von (I).

4. **a)** Aus dem gegebenen homogenen Gleichungssystem erhalten wir sukzessiv äquivalente Systeme durch anwenden des Gauss'schen Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & -2 & -11 & 0 \\ 4 & 12 & -6 & -8 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -14 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das letzte System ist auf Zeilenstufenform und wir können die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems direkt ablesen:

$$\left\{ t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems genau die Summe der allgemeinen Lösung des homogenen Gleichungssystems und einer partikulären Lösung ist. Eine partikuläre Lösung ist im Hinweis gegeben. Folglich ist die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$